COLLECTION

KOUNOUZ BAC



SECTION

SCIENCES EXPIRÉMENTALES



FICHES BAC

- Concentrés de cours
- Exercices types corrigés
- Astuces méthode

MATHÉMATIQUES

En pleine Forme !

Kounouz Editions

Kounouz Bac

Fiches Bac

MATHS

SECTION SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur principal des écoles préparatoires
et des lycées secondaires

Salima Fakhfakh Maalej
Professeur principal

Abdelbasset Laataoui
Professeur principal

Sami Benrhim
Professeur principal

Nabil Ammar
Professeur principal

Adresse : 123, Avenue Habib Thameur
Nabeul – 8000 Tunisie
Tél : (+216) 72 223 822
Fax : (+216) 72 223 922
E-mail : Kounouz.Edition@gnet.tn
Site Web : www.Kounouz-Edition.com

Préface

Ces fiches sont conçues dans l'intention de faciliter aux futurs bacheliers leur révision et de bien les préparer à l'examen qu'ils auront à passer.

Elles sont conformes aux programmes en vigueur en 4ème année et respectent leurs contenus et leur progression. Elles ont un double avantage pour l'élève puisque d'une part, elles lui donnent un résumé clair des cours et des repères utiles insistant sur les aspects essentiels à retenir. D'autre part, elles l'aident à acquérir une méthodologie de travail lui permettant d'appréhender les difficultés et de les résoudre par l'analyse et la réflexion.

Ces fiches réservent une grande partie à la pratique en proposant des exercices variés portant sur les différentes difficultés et aidant l'élève à assimiler les contenus par la mise en œuvre de ses acquis.

Des corrigés et des réponses détaillés sont donnés à l'élève en guise de pistes de travail pouvant le guider dans la réalisation des exercices et lui permettant de pratiquer son autoévaluation. Cette activité lui permettra de prendre conscience de ses lacunes et de ses difficultés qu'il essaiera de dépasser par la consolidation de ses connaissances.

Nous espérons que ce travail aura l'efficacité requise et aidera les élèves à réaliser une révision méthodique et réfléchie qui les mènera à la réussite.

Les auteurs

Sommaire

CHAPITRE

1

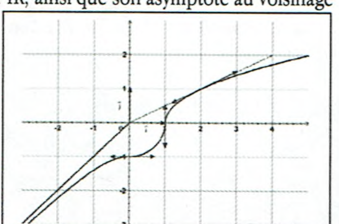
LIMITES, CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Objectif 1

Reconnaitre la limite d'une fonction à partir du graphique

ENONCES

On a représenté ci contre la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR, ainsi que son asymptote au voisinage de - ∞ et ses tangentes aux points d'abscisse respective 0, 1 et 2.



En utilisant le graphique, déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{-\infty} f$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{+\infty} f$;

$\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)+1}{x}$; $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)-1}{x-2}$.

SAVOIR

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow C_f$ admet une ***branche parabolique de direction (Ox)***.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a:≠ 0 et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à C en ± ∞.
- Dire que la fonction f est ***dérivable*** en a et que ***le nombre dérivé*** de f en a est le réel L , revient à dire que ***le taux de variation*** de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$,admet pour limite finie L quand h tend vers 0 .

Le nombre dérivé est noté f '(a) , et on a : $f'(a) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

- Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point A (a ; f (a)) une ***tangente*** T de coefficient directeur f '(a).
- Une équation de la tangente en ce point est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Si $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivables en a , mais Cf admet une tangente verticale en a.

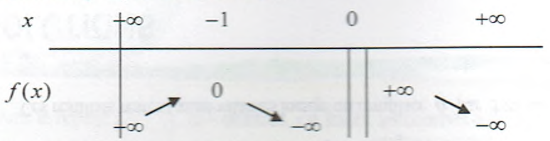
SOLUTIONS

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)+1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \frac{1}{2}$

Objectif 2 — Calculer la limite d'une fonction composée

ENONCES

La fonction f a pour tableau de variation :



Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$.

SAVOIR

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=c$

SOLUTIONS

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\\ \lim\limits_{+\infty} f=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)=-\infty$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\frac{1}{x}=(-1)^+\\ \lim\limits_{(-1)^+} f=f(-1)=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} -1+\frac{1}{x}=(-1)^-\\ \lim\limits_{(-1)^-} f=f(-1)=0\end{cases} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{-\infty} f=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$; $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}=0^-\\ \lim\limits_{0^-} f=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)=-\infty$;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{2+x^2}=-1\\ \lim\limits_{-1} f=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)=0$;

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{+\infty} f=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)=-\infty$



Calculer la limite d'une fonction en utilisant l'encadrement

ENONCES

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$, $\forall x \in IR$.

a) Montrer que : $\begin{cases} \forall x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \leq f(x) \leq x+1 \\ \forall x < -1,\ x-1 \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

b) Chercher $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$

SAVOIR

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I (noté I^*_a). Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a h = \lim\limits_a g = \ell$, alors $\lim\limits_a f = \ell$.
- Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a g = +\infty$, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I^*_a$ et si $\lim\limits_a g = -\infty$, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^-.

SOLUTIONS

a) $\forall x \in IR,\ -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \forall x \in IR,\ x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$

$\forall x \in IR,\ 1 \leq 2-\sin x \leq 3 \Rightarrow \forall x \in IR,\ \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\sin x} \leq 1$

$\forall\ x > 1,\ 0 < x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$ et $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\sin x} \leq 1 \Rightarrow \forall\ x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \leq f(x) \leq x+1$

$\forall\ x < -1,\ x-1 \leq x+\sin x \leq x+1 < 0$ et $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\sin x} \leq 1 \Rightarrow \forall\ x < -1,\ x-1 \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{3}$

b) $\forall\ x > 1,\ \dfrac{x-1}{3} \leq f(x) \leq x+1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{3} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\forall\ x < -1,\ x-1 \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{3}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{3} = -\infty$ alors $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$



Objectif 4

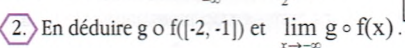
*Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
* Prouver l'existence d'une solution de l'équation f(x) = k

ENONCES

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ci – dessous, est tracée les courbes représentatives (C) et (C') respectives des fonctions f et g.

La fonction f est définie sur] - ∞, - 1] et
la fonction g est définie sur]2, 4].

1. Donner graphiquement :
f(-1), f(-2), g(4), g(3), $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{2^+} g$.



2. En déduire g o f([-2, -1]) et $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x)$.

3. Etudier le sens de variation de g o f sur]-∞, -1].

4. Prouver que l'équation
g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.

SAVOIR

☞ Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

☞ Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

On peut aussi l'exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

En particulier, si $f(a)\times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$ Si de plus f est *strictement monotone* sur I, alors *c est unique*.

SOLUTIONS

1. f(-1) = 4 ; f(-2) = 3 ; g(4) = 0 ; g(3) = 1 et $\lim_{2^+} g = +\infty$

2. g o f([-2, -1]) = g(f([-2,1])) = g([3,4]) = [0,1] et $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2^+ \\ \lim_{2^+} g = +\infty \end{cases}$

3. f est strictement croissanta sur]-∞, -1] et g est strictement décroissante sur]2,4]
⇒ g o f est strictement décroissante sur]-∞, -1]

4. $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]-\infty,-1] \\ g \text{ est continue sur }]2,4] \\ f(]-\infty,-1]) =]2,4] \end{cases} \Rightarrow g\circ f \text{ est continue sur }]-\infty,-1]$ en particulier sur [-2, -1]

$$g\circ f(-1) = 0 < \frac{1}{2} < g\circ f(-2) = 1$$

g o f est strictement décroissante sur [-2, -1]
⇒ l'équation g o f (x) = ½ admet une solution unique α dans]-2, -1[.



Etudier le signe d'une fonction sur un nintervalle donné

ENONCES

Etudier le signe de $f(x)=\sqrt{x^2-4x}+3x$ sur son domaine de définition.

SAVOIR

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

SOLUTIONS

f est continue sur son domaine de définition $]-\infty,0]\cup[4,+\infty[$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0			$+$	



Etudier la dérivabilité d'une fonction composée sur un intervalle donné

ENONCES

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi^2]$ par : $f(x) = \cos\sqrt{x}$

1. a) Vérifier que pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner f ' (0)

2. a) Justifier que f est dérivable sur $[0, \pi^2]$ et calculer f ' (x).

b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

SAVOIR

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur I} \\ g \text{ est dérivable sur J} \\ f(I) \subset J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$, $\forall x \in$ I.

SOLUTIONS

1.a) $\forall$ x $\in [0, \pi^2]$, f(x) − 1 = $\cos(\sqrt{x}) - 1 = \cos\left(2 \times \frac{\sqrt{x}}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{4} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et on a : $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

2.a) f(x) = $\cos\sqrt{x}$ = u o v où u(x) = cosx et v(x) = $\sqrt{x}$

$\begin{cases} \text{v est dérivable sur }]0, \pi^2] \\ \text{u est dérivable sur IR} \\ v(]0, \pi^2]) =]0, \pi] \subset IR \end{cases} \Rightarrow u \circ v$ est dérivable sur $]0, \pi^2]$ et on a :

f(x) = v'(x) × u'(v(x)) = $\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(-\sin\sqrt{x}\right) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\forall$ x $\in$ $]0, \pi^2]$

de plus on a : f est dérivable à droite en 0 $\Rightarrow$ f est dérivable sur $[0, \pi^2]$

x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0
$f(x)$	1	↘	-1

Objectif 7

* Démontrer une inégalité, en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finies
* Utiliser cette inégalité pour démontrer la convergence d'une suite réelle

ENONCES

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de IN, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^{\ 2}\right)$.

1. Soit la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $[1,2]$ et que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout x de $[1,2]$, $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.

2. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

c) En déduire que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.

SAVOIR

***Théorème 1** : (théorème de Rolle)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b] et vérifiant : f(a) = f(b)

Si f est dérivable sur]a,b[alors il existe au moins un élément x_0 de]a,b[tel que $f'(x_0) = 0$

***Théorème 2** : (théorème des accroissements finis)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b]

Si f est dérivable sur]a,b[alors il existe au moins un élément x_0 de]a,b[tel que $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Théorème 3 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a,b], dérivable sur]a,b[

On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour $x \in]a,b[$.

On a alors $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$

Théorème 4 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que $|f'(x)| \leq k$ pour $x \in$ I. On a alors : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous a et b de I.

SOLUTIONS

1. a) f est une fonction polynôme dérivable sur IR en particulier sur [1, 2] et on a :

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x \Rightarrow |f'(x)| = f'(x) \leq \frac{1}{2}\ \forall\, x \in [1, 2]$

b) $\begin{cases} \text{f est dérivable sur } [1,2] \\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\ \forall\, x \in [1,2] \\ 2 \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow \forall\, x \in [1,2]$, on a : $\left|f(x) - f\left(\sqrt{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$

2. a) Pour n = 0, $1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{2}$

pour $n \geq 0$, supposons que $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$

En effet : $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$ et f est strictement croissante sur [1,2] $\Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\ 2) \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2} < \sqrt{2}$

Ainsi pour tout n de IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$ et $1 \leq u_n \leq 2$

$\Rightarrow \left|f(u_n) - f(\ 2)\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \ 2\right| \Rightarrow \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

c) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) Pour n = 0, $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

e) Pour $n \geq 0$, supposons que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

f) En effet : $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$ et $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

Expression d'une fonction

1°) Soit $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-3}$ *(mode COMP)+(MthIO)*

Pour la valeur de x , utiliser la touche ALPHA et la touche) .



2°) Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2x-1}+x+1$ *(mode COMP)+(MthIO)*



Image d'un nombre réel par une fonction

1°) Soit $f(x) = \text{tg}x+\sin x+\cos x$

$f(\pi) = -1$ tan ALPHA)) + sin ALPHA)) cos ALPHA))

Math
tan(X)+sin(X)+cos(X) CALC

Math
X?
0 SHIFT ×10ˣ =

*2°)*Soit $f(x) = 1+\ln x$, $f(e)=2$ 1 + ln ALPHA)) CALC ALPHA ×10ˣ =

Limites d'une fonction

Pour avoir une idée de la valeur de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,donner à x des valeurs proches de x_0 et calculer f(x).

❑ Limite en un point

Exemple : $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-3x}{x^2-1}$ (Entrer $\dfrac{-3x}{x^2-1}$) ▭ (−) 3 ALPHA) REPLAY ALPHA) x² − 1

X	f(X) ≈	Appuyez sur ces touches :
-0.9	-14.21052632	CALC (−) 0 • 9 =
-0.99	-149.2462312	CALC (−) 0 • 9 9 =
-0.999	-1499.249625	CALC (−) 0 • 9 9 9 =

ce qui confirme les valeurs (*et surtout les signes!*) que nous avons trouvées $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-3x}{x^2-1} = -\infty$

❑ *Limite à l'infini*

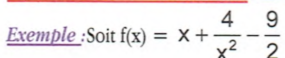
Exemple : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-1}$ (Entrer $\dfrac{\cos x}{x^2-1}$)



X	f(X)≈	Appuyez sur ces touches :
10	-0.00847546999	CALC 1 0 =
100	0.00008624051	CALC 1 0 0 =
1000	0.00000056237	CALC 1 0 0 0 =

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2-1} = 0\ (0^+)$

Encadrement d'une solution

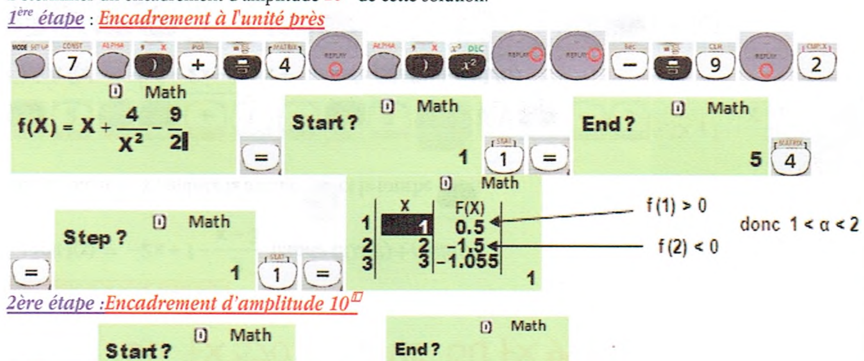


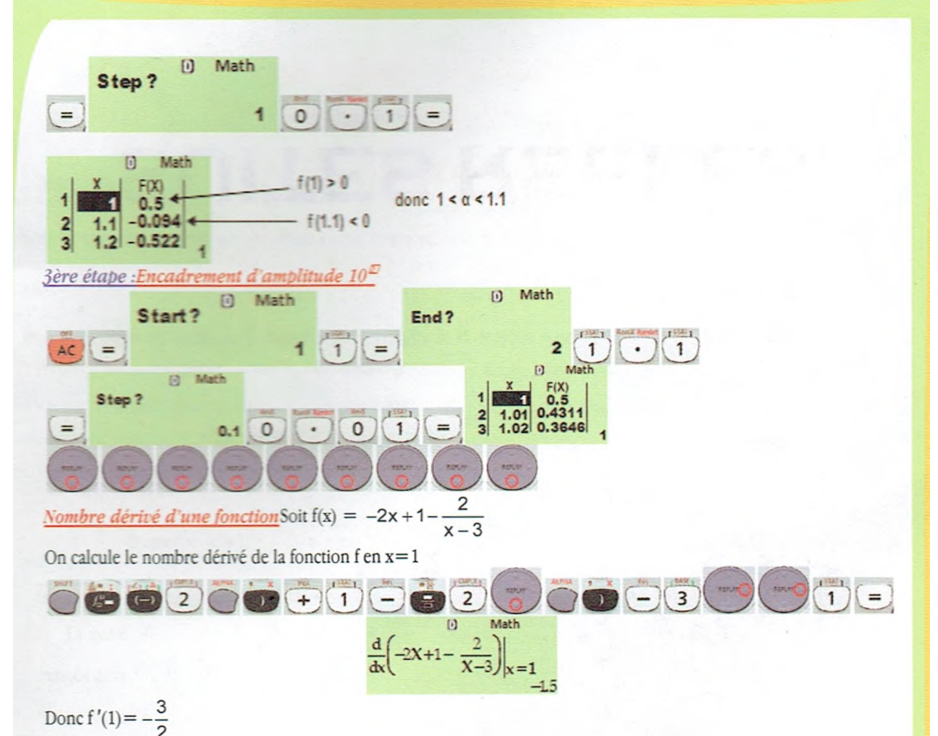
Exemple :Soit f(x) = $x + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{9}{2}$

f(x) = 0 admet une unique solution α dans [1 ; 4].

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

1ère étape : *Encadrement à l'unité près*





3ère étape :Encadrement d'amplitude 10^{-2}

Nombre dérivé d'une fonction Soit $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-3}$

On calcule le nombre dérivé de la fonction f en x=1

$$\frac{d}{dx}\left(-2X+1-\frac{2}{X-3}\right)\Bigg|_{x=1}$$

-1.5

Donc $f'(1) = -\dfrac{3}{2}$

CHAPITRE 2

SUITES REELES

Objectif 1

Manipuler les opérations sur les suites pour décider la convergence ou la monotonie d'une suite

ENONCES

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Répondre par vraie ou fausse à chacune des propositions ci dessous (une justification est demandée).

1) si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2) si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3) si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4) si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.

SAVOIR

- si (u_n) converge vers L. $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ a pour limite $\frac{1}{L}$ si $L \neq 0$, c'est le cas $L = 0$ qui pose problème, pour batir un exemple, on examine des suites simples convergentes vers 0.
- La suite (U_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant : $u_0 \leq u_1 \leq ...... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq ....$
- La suite (U_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre décroissant : $u_0 \geq u_1 \geq ...... \geq u_n \geq u_{n+1} \geq ....$
- Une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite (U_n) est dite ***convergente*** lors qu'elle admet une ***limite finie*** quand n tend vers $+\infty$
- Une suite qui n'est pas convergente est dite ***divergente***, dans ce cas elle peut avoir une limite infinie ou ne pas avoir une limite en $+\infty$.

SOLUTIONS

1) fausse : soit $u_n = \frac{1}{n+1}$, (u_n) est à termes non nuls et converge vers 0 et $v_n = -2(n+1)$ a pour limite $-\infty$ donc n'est pas convergente.

2) vraie : (u_n) est minorée par 2, donc pour tout n∈ N, $u_n \geq 2$ d'où $\frac{2}{u_n} \leq \frac{2}{2}$ et donc $v_n \leq -1$, (v_n) est donc bien minorée par -1.

3) Fausse : le contre exemple de 1) le prouve.

4) Fausse : comme contre exemple, prenons $u_n = (-1)^n$.

Objectif 2

* Etudier la limite d'une suite du type $u_n = f(n)$ ou $u_n = f(v_n)$
* Utiliser le théorème de comparaison pour déterminer la limite d'une suite

ENONCES

1) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2n^2+5n+1}{n^2+n}$, $n \in N^*$.

2) Etudier la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(0,2)^n - 1}{(0,2)^n + 1}$; $n \in N$.

3) Soit $u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$ pour $n \in N^*$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $v_n = 3(1 - \dfrac{1}{n+1})^3$ et en déduire $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$

b) Monter que pour tout $n \geq 7$, $v_n \geq 2$.

c) En déduire que pour $n \geq 8$, $v_7 \times v_8 \times .... \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$ puis que $u_n \geq 2^{n-7} u_7$

d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

SAVOIR

✓ f est une fonction définie sur $]a, +\infty[$ et (u_n) la suite telle que $u_n = f(n)$

l est un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$.

✓ f est une fonction définie sur I, (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(v_n) = c$.

✓ Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que : $w_n \leq u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{+\infty} w_n = \lim\limits_{+\infty} v_n = l$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = l$

✓ Si $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$. Si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = -\infty$.

SOLUTIONS

1) on a : $u_n = f(n)$ où f : $x \to f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

2) posons pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 0{,}2^n$, alors $u_n = f(v_n)$ avec $f(x) = \frac{x-1}{x+1} (x \neq -1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ (v est géométrique de raison 0,2)

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

3) a) $v_n = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{3^n} = \frac{3^{n+1} \times n^3}{3^n \times (n+1)^3} = 3 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 3 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$)

b) si $n \geq 7$, $n+1 \geq 8$ donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{8}$ et $1 - \frac{1}{n+1} \geq \frac{7}{8}$, d'où $v_n \geq 3.\left(\frac{7}{8}\right)^3$.

Or $3.\left(\frac{7}{8}\right)^3 \geq 2$.

Donc $v_n \geq 2$ pour $n \geq 7$.

c) $v_7 \times v_8 \times .... \times v_{n-1} \geq 2 \times ..... \times 2 (n - 7\ facteurs)$, donc $v_7 \times .... \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$

or $v_7 \times .... \times v_{n-1} = \frac{u_8}{u_7} \times \frac{u_9}{u_8} \times ..... \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_7}$ donc $\frac{u_n}{u_7} \geq 2^{n-7}$

par suite $u_n \geq 2^{n-7}\ u_7$ car $u_7 > 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-7} = +\infty$, par théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Objectif 3

Etudier la convergence d'une suite recurrente (théorème du point fixe et suite auxiliaire)

ENONCES

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n - 1} \text{ pour tout n de IN} \end{cases}$.

1. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 < u_n < 2$.

   b) Montrer que (u_n) est croissante.

   c) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

2. Soit (v_n) la suite réelle définie sur IN par : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

   c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

SAVOIR

- ✓ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ✓ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- ✓ Si une suite (u_n) est telle que :* $u_{n+1} = f(u_n)$

  * (u_n) est convergente vers l

  * f continue, en l

Alors $f(l) = l$ (donc l est une solution de l'équation $f(x) = x$).

SOLUTIONS

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n - 1} \text{ pour tout n de IN} \end{cases}$$

1) a) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $1 < u_n < 2$.

➡ Pour n = 0, $1 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$

➡ Pour n ≥ 0, supposons que $1 < u_n < 2$ et montrons que $1 < u_{n+1} < 2$

En effet :

$$1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_n - 1} < 1 \Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2 \Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

Ainsi $\forall$ n $\in$ IN, $1 < u_n < 2$

b) $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1) = \sqrt{u_n - 1}\left(1 - \sqrt{u_n - 1}\right)$

Or $1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{u_n - 1} < 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{u_n - 1} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \underbrace{\sqrt{u_n - 1}}_{>0}\underbrace{\left(1 - \sqrt{u_n - 1}\right)}_{>0} > 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée par 2 $\Rightarrow (u_n)$ est convergente vers un réel $\ell \in [1, 2]$

$$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [1, 2] \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = 1 + \sqrt{x - 1} \ \forall x \in [1, +\infty[\\ f \text{ est continue sur } [1, +\infty[\text{ donc en } \ell \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\ell - 1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell - 1}\left(1 - \sqrt{\ell - 1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$ ou $\ell = 2$

Or $u_n \geq u_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \ell = 2$.

2) $v_n = \ln(u_n - 1)$

a) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\sqrt{u_n - 1} = \frac{1}{2}\ln(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n \ \forall$ n $\in$ IN

$\Rightarrow (v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{2} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

c) $u_n = 1 + e^{v_n} \ \forall$ n $\in$ IN $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \underbrace{e^{v_n}}_{e^0 = 1} = 2$



Etudier la convergence d'une suite monotone

ENONCES

On a tracé ci- après, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (ζ) représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=e^x-2$ ainsi que la droite $\Delta : y=x$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1) conjecturer à partir du graphique, le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

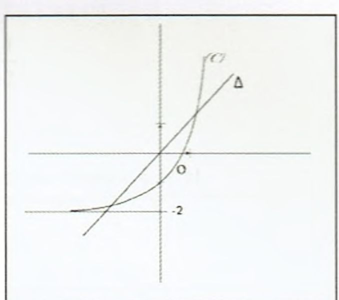
2) prouver que :

a) la suite (u_n) est décroissante.

b) pour tout entier $n\in N$, $-2\le u_n\le 0$, déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) a) démontrer que l'équation $f(x)=x$ a deux solutions et deux seulement dans R.

b) trouver un encadrement de la limite l de la suite (u_n) d'amplitude 10^{-1}.



SAVOIR

- ✓ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ✓ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- ✓ Si une suite (u_n) est telle que :* $u_{n+1}=f(u_n)$

  * (u_n) est convergente vers l

  * f continue, en l

Alors $f(l)=l$ (donc l est une solution de l'équation $f(x)=x$).

SOLUTIONS

1) en représentant les premiers termes de la suite (u_n), le graphique me permet de conjecturer que (u_n) est décroissante minorée par $u_0 = 0$ et qu'elle est donc convergente.

2) utilisons un raisonnement par récurrence.

a) *on a $u_1 = f(u_0) = f(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$

donc $u_0 = 0 \geq u_1 = -1$.

Supposons que $u_{n-1} \geq u_n$ et démontrons que $u_n \geq u_{n+1}$.

$u_{n-1} > u_n$ donc $f(u_{n-1}) \geq f(u_n)$ (f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) = e^x > 0$; $x \in \mathbb{R}$)

ainsi $u_n \geq u_{n+1}$, d'où (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

b) * on a $u_0 = 0$ donc $-2 \leq u_0 \leq 0$.

* supposons que $-2 \leq u_n \leq 0$ et démontrons que $-2 \leq u_{n+1} \leq 0$.

$-2 \leq u_n \leq 0$ donc $f(-2) \leq f(u_n) \leq f(0)$ (car f est croissante sur R).

Ainsi $e^{-2} - 2 \leq u_{n+1} \leq -1$, or $e^{-2} - 2 \geq -2$ et $-1 \leq 0$ donc $-2 \leq u_{n+1} \leq 0$, par suite pour $n \in N$, $-2 \leq u_n \leq 0$.

3) a) Soit $\varphi(x) = f(x) - x$, φ est dérivable sur IR et $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = e^x - 1$.

Le théorème de la bijection affirme que l'équation $\varphi(x) = 0$ c'est-à-dire $f(x) = x$ admet exactement 2 solutions dans IR, l'une dans $]-\infty, 0[$ et l'autre dans $]0, +\infty[$.

b) (u_n) est telle que :

✓ $u_{n+1} = f(u_n)$.

✓ (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente vers $l \leq 0$.

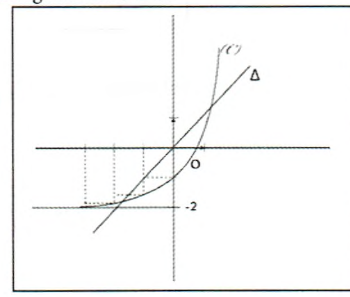
✓ $f : x \to e^x - 2$ est continue sur R, en particulier en l.

Donc $f(l) = l$ avec $l \leq 0$.

$\varphi(-1,5) < 0$ donc $l \in]-2, -1,5[$ $\quad (\varphi(-1,5) \simeq -0.276)$

$\varphi(-1,8) < 0$ donc $l \in]-1,8; -2[$ $\quad (\varphi(-1,8) \simeq -0,034)$.

$\varphi(-1,9) > 0$ donc $-1,8 < l < -1,9$ $\quad (\varphi(-1,9) \simeq 0,049)$.

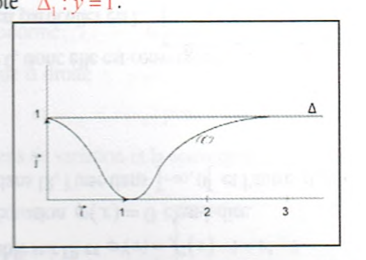


Objectif 5

Montrer que deux suites sont adjacentes

ENONCES

On a tracé ci après, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (ζ) représentative d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$, ainsi que son asymptote $\Delta_1 : y = 1$.



1°) a) par lecture graphique préciser en fonction d'un réel donné k, le nombre de solutions dans $[0,+\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.

b) $n \in N^*$, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

2°) a) Soit $n \geq 2$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement dans $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

b) Construire sur l'axe des abscisses, les termes u_n et v_n pour $n \in \{1,2,3\}$

c) Déterminer le sens de variation des suites u et v.

d) Montrer que les suites u et v sont convergentes. En déduire que u et v sont adjacentes.

SAVOIR

Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que l'une est croissante, l'autre est décroissante et que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers O.

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :

*elles sont toutes les deux convergentes.

*elles ont la même limite.

SOLUTIONS



a)

k	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
nombre de solutions de f(x)=k	pas de solution	2 solutions	pas de solution

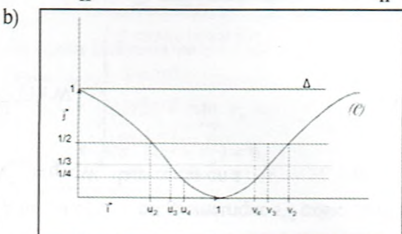
1 solution 1 solution

b) l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes pour $0<\frac{1}{n}<1$, c'est-à-dire pour $n>1$.

2°) a) • f est continue et strictement décroissante sur [0,1] et f ([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1] et pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in [0,1[$, donc l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution $u_n \in [0,1]$.

• f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $f([1,+\infty[)=[f(1),\lim_{+\infty} f[=[0,1[$ or pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in [0,1[$, donc l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution v_n dans $[1,+\infty[$

b)



c) pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

• sur [0,1] ; ou a $\begin{cases} f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \\ f \text{ décroissante} \end{cases}$ donc $u_n \leq u_{n+1}$ et d'où u est croissante

• sur $[1,+\infty[$; ou a $\begin{cases} f(v_n) \geq f(v_{n+1}) \\ f \text{ est croissante} \end{cases}$ donc $v_n \geq v_{n+1}$,ainsi v est décroissante

d) la suite u est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers $l \in [0,1]$

la suite v est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers $l' \in [0,1]$

Le plus $f(u_n) = f(v_n)=\frac{1}{n}$ et f est continue sur $[0,+\infty[$, donc elle est continue en l et l', ainsi :

$$\begin{cases} \lim_{+\infty} f(u_n)=f(l) \\ \lim_{+\infty} f(v_n)=f(l') \; donc \; f(l)=f(l')=0, \; ainsi \; l=l'=1 \\ \lim_{+\infty} \frac{1}{n}=0 \end{cases}$$

On en déduit que les suites u et v sont adjacentes puisque l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim_{+\infty} (u_n - v_n)=0$.



Chercher la limite commune de deux suites adjacentes

ENONCES

Soit les deux suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par la donnée de u_0 et $v_0(u_0<v_0)$ et les relations de récurrence : $u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$

1) Démontrer que la suite v-u est une suite géométrique et donner sa limite.
2) Montrer que, la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
3) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
4) Montrer que la suite v+u est une suite constante.
5) En déduire la valeur de la limite commune des deux suites u et v.

SAVOIR

1) Une suite (W_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $W_{n+1}=q\times W_n$ dans ce cas on a : $W_n=W_0\times q^n$.

2) $$\lim_{1\to+\infty} W_n=\begin{cases}0 \text{ si } q\in]-1,1[\\ W_0 \text{ si } q=1\\ \pm\infty \text{ si } q>1\\ n'\text{existe pas si } q\leq -1\end{cases}$$

SOLUTIONS

1) Soit $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-u_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)(v_n-u_n)$, d'où $(v-u)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1[er] terme v_0+u_0 comme $\frac{1}{3}\in]-1,1[$ alors $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$v_n-u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(v_0-u_0)>0 \ (\text{car } v_0>u_0)$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) > 0$ d'où (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) < 0$ d'où (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

3) On a : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + u_{n+1} = \frac{3(u_n + v_n)}{3} = u_n + v_n$

On montre facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_0 + v_0$ (Récurrence)

D'où la suite $(v+u)$ est constante sur $\mathbb{N}$.

5) On a :
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$ (car (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite)
- $\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = u_0 + v_0$

On en déduit alors que $\lim_{n \to +\infty} u_n + \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell + \ell = u_0 + v_0$

ainsi $2\ell = u_0 + v_0$, $\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}$

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

■ *Suites récurrentes*

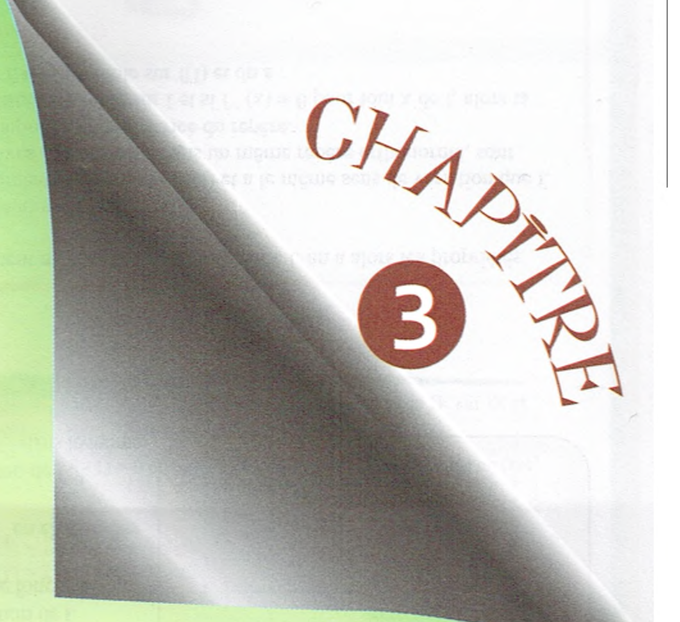
L'instruction Ans rappelle le résultat du dernier calcul effectué. Elle peut s'avérer très commode pour calculer les termes d'une suite récurrente.
On considère, ***par exemple***, la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2u_n - 5.$$

n	u_n	Appuyez sur ces touches :
1	13	9 = 2 Ans − 5 =
2	21	=
3	37	=
4	69	=

■ *Calculs* $\sum$: *(MODE COMP) + (MthIO)* ; $\sum_{k=0}^{10} 4k+1 = 231$





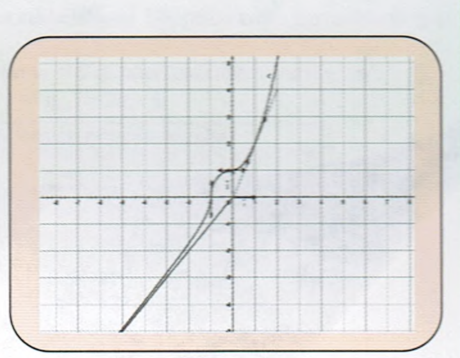
FONCTION RÉCIPROQUE

Objectif 1

* Justifier l'existence d'une fonction réciproque f – 1
* Tracer sa courbe représentative
* Etudier la dérivabilité de f – 1 en un point donné

ENONCES

On a représenté ci-contre, la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR, ainsi que son asymptote au voisinage de - ∞ et ses tangentes aux points d'abscisses respectives – 1, 0 et 1.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Justifier l'existence d'une fonction réciproque f^{-1} de f .
b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en chacun des réels 0, 1 et 2.
c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
d) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que celui de f.

SAVOIR

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. on a alors les propriétés suivantes :

- La fonction f est une bijection de I sut f(I).
- La fonction f^{-1} est strictement monotone sur f(I) et a le même sens de variation que f.
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un même repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.
- Si de plus f est une fonction dérivable sur I et si $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors la fonction f^{-1} , réciproque de f, est dérivable sur f(I) et on a :

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f(f^{-1}(x))}$ pour tout x de f(I)

SOLUTIONS

1.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗					$+\infty$

2. a) f est continue et strictement croissante sur IR donc f réalise une bijection de IR sur IR et par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR à valeurs dans IR.

b) *f n'est pas dérivable en - 1 et on : f(- 1) = 0 et $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=+\infty$ donc f^{-1} est dérivable en 0 et on a $(f^{-1})'(0)=0$.

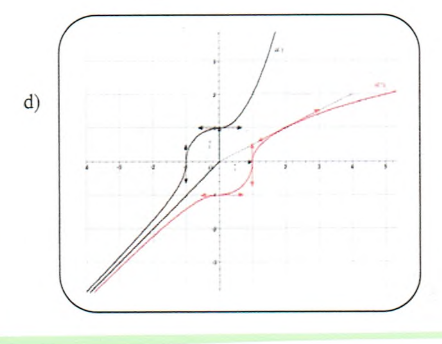
* f est dérivable en 0 et on : f(0) = 1 et f ′ (0) = 0 donc f^{-1} n'est pas dérivable en 1.
* f est dérivable en 1 et on : f(1) = 2 et f ′ (1) = 2 donc f^{-1} est dérivable en 2 et on a :

$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{2}=0.5$.

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$		$+$	0	$+$	||	$+$	
$(f^{-1})(x)$	$-\infty$	↗					$+\infty$

d)





* Justifier l'existence d'une fonction réciproque g-1
* Tracer sa courbe représentative
* Expliciter g-1(x)

ENONCES

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle] 0, + ∞[réalise une bijection de]0, + ∞[sur un intervalle I que l'on déterminera.

b) Construire dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives de g et de g^{-1}.

c) Calculer $g^{-1}(x)$, pour $x \in I$.

SAVOIR

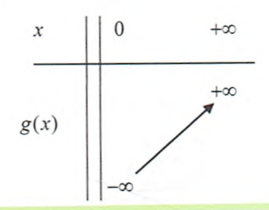
Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. on a alors les propriétés suivantes :
La fonction f^{-1}, réciproque de f, est une bijection de f(I) sur I et on a : $(x \in I, y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(I), x = f^{-1}(y))$

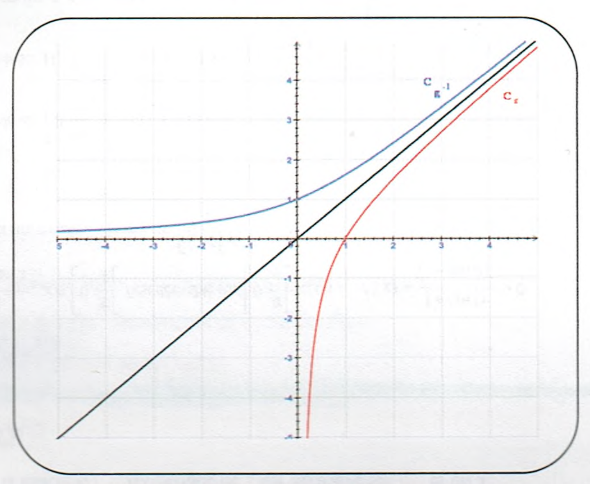
SOLUTIONS

a) Chacune des fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue et strictement croissante sur]0, + ∞[; donc la fonction g est continue et strictement croissante sur]0, + ∞[.

Il en résulte que g est une bijection de]0, + ∞[sur $g(]0, +\infty[) = \left]\lim_{0^+} g, \lim_{+\infty} g\right[=]-\infty, +\infty[$.

b) Tableau de variation de g :





c) Soit x un réel quelconque et y un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y - \dfrac{1}{y} = x \Leftrightarrow y^2 - xy - 1 = 0$

Le discriminant de l'équation $y^2 - xy - 1 = 0$ est $\Delta = x^2 + 4 > 0$.

Cette équation admet donc deux solutions : $y_1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$. On vérifie que $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$. La solution, dans $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation $y^2 - xy - 1 = 0$ d'inconnue y est donc $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Conclusion : pour tout réel x, on a : $g^{-1}(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Objectif 3

Etudier la dérivabilité d'une fonction réciproque sur un intervalle donné et calculer sa fonction dérivée

ENONCES

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g sa fonction réciproque. Construire ζ_f et ζ_g dans un même repère orthonormé.

2. Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout $x\in J$, $g'(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$.

SAVOIR

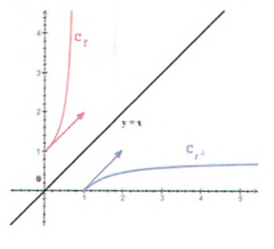
Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I et si $f'(x)\neq 0$ pour tout x de I, alors la fonction f^{-1}, réciproque de f, est dérivable sur f(I) et on a : $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour tout x de f(I).

SOLUTIONS

$f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et on a : $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$

$\Rightarrow f$ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ sur $J=[1,+\infty[$



1. f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et on a : $f'(x)\neq 0$

$\Rightarrow$ g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a : $g'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{(1-\tan t)^2}{1+\tan^2 t}$

Où $t=f^{-1}(x)\Rightarrow f(t)=x\Rightarrow 1-\tan t=\frac{1}{x}\Rightarrow 1+\tan^2 t=1+(1-\frac{1}{x})^2$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2x^2-2x+1}$, $\forall x\in[1,+\infty[$



Etudier une fonction racine n-ième

ENONCES

f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sqrt[3]{2x^2+1}$.

a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Étudier la limite de f en $+\infty$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

c) Démontrer que f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$.

d) En déduire le sens de variation de f.

SAVOIR

☞ Pour tout réel x strictement positif : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$ $(n \geq 2)$.

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-1}}} \text{ , si } u(x) > 0 \text{ et } n \geq 2.$$

SOLUTIONS

a) Pour tout $x \in$ IR , $-x \in$ IR. $f(-x) = \sqrt[3]{2(-x)^2+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} = f(x)$ donc f est paire.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt[3]{y} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

f étant paire, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) La fonction $x \mapsto 2x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur IR.

La fonction $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Par la théorème sur les composées, f est dérivable sur IR.

Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2}}$.

d) le signe de $f'(x)$ est celui de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

CHAPITRE

4

PRIMITIVES ET INTÉGRALES



Reconnaitre une primitive d'une fonction

ENONCES

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$

Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

SAVOIR

F et G sont deux primitives sur I d'une même fonction f alors $\begin{cases} F(x)-g(x)=\text{constante} \\ F'(x)=G'(x) \end{cases}$

SOLUTIONS

Pour t Pour tout $x\in]-1\,;+\infty[$, $G(x)-F(x)=$

$$x-2+\frac{1}{x+1}-\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{x^2+x-2x-2+1-x^2-x-1}{x+1}$$

$$=\frac{-2x-2}{x+1}=-2$$

$\Rightarrow$F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f, avec $f(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$



Faire le lien entre primitive et intégrale

ENONCES

Ecrire, sous la forme intégrale, la primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en t_0 et la calculer dans les cas suivants :

A) $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$, $t_0 = 1$; **b)** $f(t)=-\dfrac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$, $t_0 = 2$; **c)** $f(t)=\dfrac{e^{\sqrt{t}}-1}{\sqrt{t}}$, $t_0 = 4$

SAVOIR

☞ Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et a un réel de I, la fonction F telle que $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

☞ Le plus souvent le calcul d'une intégrale se ramène à la recherche d'une primitive.

Ainsi, le calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$ revient généralement à justifier l'existence d'une primitive F de f sur I, puis à calculer F à l'aide du tableau des primitives usuelles ; on a alors immédiatement $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

SOLUTIONS

A) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1-\frac{1}{x}$

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $G(x)=\int_1^x -\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}dt = \left[e^{\frac{1}{t}}\right]_1^x = e^{\frac{1}{x}}-e$

c) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F(x)=\int_4^x \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{\sqrt{t}}dt = 2\int_4^x\left(\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt = 2\left[e^{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right]_4^x$

$$= 2\left(e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-e^2+2\right)$$



Encadrer une intégrale

ENONCES

1°) Prouver que : $\int_1^3 \sin(t^2)dt \leq 2$.

2°) Montrer que : $0 \leq \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \leq 1$.

SAVOIR

- Si f est continue et positive sur I, et si $a \leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Soit I un intervalle, a et b dans I tel que $a \leq b$, soient f et g continues sur I.

$$f(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

SOLUTIONS

Dans les deux cas, les fonctions considérées sont continues sur IR, donc intégrables sur l'intervalle d'intégration.

1°) Puisque $\sin(t^2) \leq 1$, alors $\int_1^3 \sin(t^2)\,dt \leq \int_1^3 1dt$. Or $\int_1^3 1dt = 1(3-1) = 2$, donc $\int_1^3 \sin(t^2)\,dt \leq 2$.

2°) Puisque $0 \leq x \leq 1$, alors : $0 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq x \leq 1$. D'où $0 \leq \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 1dx$.

Or $\int_0^1 1\,dx = 1$ donc $0 \leq \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \leq 1$.



Etudier une fonction définie à l'aide d'une intégrale

ENONCES

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$

1°) Montrer que F est dérivable sur IR puis calculer $F'(x)$ pour tout $x \in$ IR.

2°) Soit $\varphi(x) = F(1-x) + F(x)$, $x \in$ IR.

a) Calculer $\varphi'(x)$ pour tout x de IR puis $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) En déduire que le point I $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de F.

SAVOIR

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel de I alors la fonction $F : x \mapsto \int_{a}^{x} f(t)dt$ est dérivable sur I et on a : pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$
- Soit f une fonction définie sur un ensemble D, le point I(a, b) est un centre de symétrie de la courbe de f, si et seulement si, pour tout x de D, on a : $\begin{cases} (2a-x) \in D \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

SOLUTIONS

1°) $t^2 - t + 1 > 0$ car $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$t \mapsto t^2 - t + 1$ est une fonction polynôme continue et strictement positive sur IR donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}}$ est continue sur IR ainsi F est dérivable sur IR et pour tout de IR on a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

2°) ***a)*** $\varphi(x) = F(1-x) + F(x)$, $\varphi'(x) = -F'(1-x) + F'(x)$

$= \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x+x^2-1+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ainsi, $\varphi'(x) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{2}) = 2F(\frac{1}{2})$ or $F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = 0$ donc $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

b) $\varphi'(x) = 0$ donc $\varphi(x) = c$ où $c \in$ IR pour tout $x \in$ IR or $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$

donc $c = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$ ainsi pour tout $x \in D_f =$ IR on a $(1-x) \in D_f$ et $F(1-x) + F(x) = 0$

donc $I(\frac{1}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Objectif 5

Calculer l'intégrale d'une fonction continue (utiliser la parité ou la périodicité de cette fonction)

ENONCES

Calculer : a) $\int_{-1}^{1} x^3 \cos x \, dx$; b) $\int_{-3}^{3} |x| \, dx$; c) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x \, dx$; d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx$

SAVOIR

Soit f une fonction continue sur $[-a\ ;a]$, avec $a > 0$.

- Si f est paire, $f(-x) = f(x)$ alors : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- Si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$, alors : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ et $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T $f(x+T) = f(x)$ alors, pour tout réel a : $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$

SOLUTIONS

a) $x \mapsto x^3 \cos x$ est une fonction 2π périodique et impaire $\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 \cos x \, dx = 0$

b) $x \mapsto |x|$ est une fonctionnaire $\Rightarrow \int_{-3}^{3} |x| \, dx = 2\int_{0}^{3} |x| \, dx = 2\int_{0}^{3} x \, dx = \left[x^2\right]_0^3 = 9$

c) $x \mapsto \sin 2x$ est une fonctionπpériodique et impaire $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}+\pi} \sin 2x \, dx = \int_{0}^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$

d) $x \mapsto |\cos x|$ est une fonctionπpériodique et paire

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \, dx = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 4\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

Objectif 6 Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties

ENONCES

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; b) $\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$; c) $\int_0^1 x\,e^x\,dx$; d) $\int_0^{\pi} (x+2)\sin x\,dx$;

SAVOIR

Soient u et v deux fonctions dérivables dont leurs dérivées sont continues sur un même intervalle [a ;b] et f une fonction continue sur [a ;b] telle que $f(x) = u(x)\,v'(x)$.

Alors : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Cette technique permet dans la pratique d'intégrer ou de simplifier certaines intégrales où $f(x)$ est le produit d'une fonction u de dérivée simple et d'une fonction v facile à intégrer.

SOLUTIONS

a) On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$. Il vient $u'(x)=1$ et $v(x)=2\sqrt{x+1}$

Les fonctions u, u', v, v' sont continues sur [0 ; 1]. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-2\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{3}}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$

b) On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x^2$. Il vient $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\frac{x^3}{3}$.

La formule d'intégration par parties donne :

$\int_1^2 x^2\ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx$. Ainsi $\int_1^2 x^2\ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$

c) On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=e^x$. Il vient $u'(x)=1$ et $v(x)=e^x$.

La formule d'intégration par parties donne :

$\int_0^1 x\, e^x\, dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx.$ *Ainsi* $\int_0^1 x\, e^x\, dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$

$= \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = 1$

d) On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \sin x$ .Il vient $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$.

$\int_1^2 (x+2)\sin x\, dx = \left[-(x+2)\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx$.

Ainsi $\int_1^2 (x+2)\sin x\, dx = \left[-(x+2)\cos x\right]_0^\pi + \left[\sin x\right]_0^\pi = \pi + 4$



* Etudier une suite définie à l'aide d'une intégrale
* Calculer le volume d'un solide de révolution

ENONCES

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$.

1°) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2°) *a)* Démontrer que, $I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$.

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

3°) Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, par rotation autour de l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$, la courbe d'équation

$y = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

(avec $x \in [1 ; e^2]$) , engendre un solide de révolution.
Calculer le volume de ce solide en unités de volume.

SAVOIR

Pour trouver le volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe d'une fonction autour de (Ox):

✓ On coupe le solide par un plan perpendiculaire à l'axe et on remarque que l'on trouve un disque de rayon $|f(x)|$.

✓ L'aire de ce disque vaut $\pi\left[f(x)\right]^2$.

✓ On calcule alors : $V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$ pour obtenir le volume.

SOLUTIONS

1°) $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, on pose: $u'(x) = \frac{1}{x^2}$, $u(x) = -\frac{1}{x}$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$.

La formule d'intégration par parties donne:

$$I_1 = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{2}{e^2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 = 1 - \frac{3}{e^2}.\ I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}.$$

2°) *a)* On calcule I_{n+1} par parties en posant: $u'(x) = \frac{1}{x^2}$, $u(x) = -\frac{1}{x}$, $v(x) = (\ln x)^{n+1}$, $v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$.

$$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -(n+1)\frac{1}{x^2}(\ln x)^n dx = -\frac{1}{e^2}\times 2^{n+1} + (n+1)\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$$

$$= -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n.$$

b) $I_2 = -\frac{4}{e^2} + 2I_1 = -\frac{4}{e^2} + 2(1 - \frac{3}{e^2}) \Rightarrow I_2 = 2 - \frac{10}{e^2}$, $I_3 = -\frac{8}{e^2} + 3I_2$

$= -\frac{8}{e^2} + 3(2 - \frac{10}{e^2}) \Rightarrow I_3 = 6 - \frac{38}{e^2}$

3°) Le volume d'un solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $[a ; b]$, $a < b$, est donné par la formule:

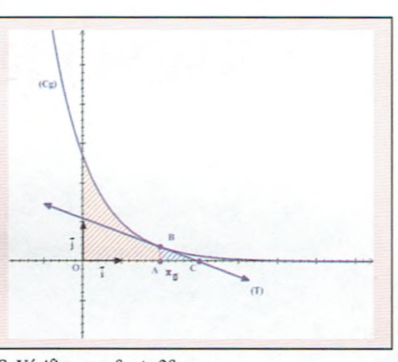
$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$. Pour la courbe d'équation $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$ sur $[1 ; e^2]$.

$V = \pi\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^4}{x^2}dx = \pi I_4 = \pi(-\frac{16}{e^2} + 4I_3) = \pi(24 - \frac{168}{e^2})$. (en unités de volume).



Calculer l'aire d'un domaine plan

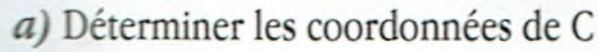
ENONCES



Soit x_0 un réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{1-x}$ et sa courbe représentative (C_g).

1°) On considère le domaine limité par (C_g), les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_0$ et l'axe des abscisses. Exprimer, à l'aide de x_0, l'aire S_1 de ce domaine.

2°) A est le point de coordonnées $(x_0 , 0)$; B est le point de (C_g) d'abscisse x_0. Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point B. On note C le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.



a) Déterminer les coordonnées de C

b) Calculer (en unités d'aires) l'aire S_2 du triangle ABC. Vérifier que $S_1 + 2S_2 = e$.

SAVOIR

☞ Soient a et b deux réels tels que $a \le b$, f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a ; b]$, et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ est ***l'aire***, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

☞ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a, b], l'aire du domaine limité par Cf, Cg et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ u.a

SOLUTIONS

1°) $S_1 = \int_0^{x_0} e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^{x_0} = e - e^{1-x_0}$.

2°) *a)* Equation de la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0 :

$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = -e^{1-x_0}(x - x_0) + e^{1-x_0}$

On obtient l'abscisse du point C en faisant $y = 0$, soit $x = x_0 + 1$, donc C $(0 ; x_0 + 1)$.

b) Le triangle ABC est rectangle en A, donc son aire est donnée par :

$S_2 = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{e^{1-x_0} \times (x_0 + 1 - x_0)}{2} = \frac{e^{1-x_0}}{2}$ Donc $S_1 + 2S_2 = e - e^{1-x_0} + 2 \times \frac{e^{1-x_0}}{2} = e$.

CHAPITRE

5

Logarithme Népérien

Objectif 1 — Manipuler les propriétés algébriques de la fonction ln

ENONCES

Ecrire les expressions sous la forme : $\ln a$, où a est un réel strictement positif

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln 3-\ln 12+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$

b) $-\ln 3+\ln(27e)-\ln\left(9\ \ e\right)$

c) $\ln\left(7+5\sqrt{2}\right)+8\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

SAVOIR

$\boxed{\ln 1=0}$ et e est le nombre de Néper, défini par $\boxed{\ln e=1}$

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$, $\ln\left(a^n\right)=n\ln a\,(n\in\mathbb{Q})$

SOLUTIONS

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln 3-\ln 12+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)=\ln\left[\underbrace{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}_{3-1}\right]+\ln\left(\frac{3}{12}\right)$

$=\ln 2+\ln\frac{1}{4}=\ln\frac{1}{2}=\ln 2^{-1}=-\ln 2$

b) $-\ln 3+\ln(27e)-\ln\left(9\ \ e\right)=\ln\left(\frac{27e}{3\times 9\ \ e}\right)=\ln\left(\ \ e\right)$

$=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$

c) $\ln\left(7+5\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

$=\ln\left[\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right]+7\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

$=\ln\left[17+12\sqrt{2}\right]+7\ln\left[\underbrace{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}_{2-1}\right]$

$=\ln\left(17+12\sqrt{2}\right)+7\ln 1=\ln\left(17+12\sqrt{2}\right)$

Objectif 2 — Reconnaitre les valeurs remarquables de la fonction ln

ENONCES

Donnez la valeur exacte de $f(e)$, $f\left(\frac{1}{e}\right)$, $f\left(\quad e\right)$ et $f\left(e^2\right)$ dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto (\ln x)^2 - \ln x$ b) $f : x \mapsto \ln(x^2) - \ln x$

SAVOIR

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$; $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$; $\ln(e^n) = n$

SOLUTIONS

a) $f(e) = (\ln e)^2 - \ln e = 0$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right]^2 - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f\left(\sqrt{e}\right) = \left[\ln\left(\sqrt{e}\right)\right]^2 - \ln\sqrt{e} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $f\left(e^2\right) = \left(\ln\left(e^2\right)\right)^2 - \ln\left(e^2\right) = (2)^2 - 2 = 2$

b) $f(e) = \ln\left(e^2\right) - \ln e = 2 - 1 = 1$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = -1$

$f\left(\sqrt{e}\right) = \ln\left(\left(\sqrt{e}\right)^2\right) - \ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln e - \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$; $f\left(e^2\right) = \ln\left(\left(e^2\right)^2\right) - \ln e^2 = \ln e^4 - 2 = 2$

Objectif 3 Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir la fonction ln

ENONCES

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation et inéquations suivantes :

1) a) $\ln x = 1$ b) $\ln x = -2$ c) $\ln x = \frac{1}{2}$

2) a) $\ln x = \ln(3x-1)$ b) $\ln(x^2) = -2\ln 7$

3) a) $\ln(x+2) = \ln(2x-1) + \ln(4-x)$ b) $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$

4) a) $\ln x > -1$ b) $\ln x \leq \frac{2}{3}$ c) $\ln x \leq 3\ln 2$

5) a) $\ln(1-3x) \leq -\ln x$ b) $3(\ln x)^2 - 8\ln x + 4 < 0$ c) $\frac{(x-2e)\ln x}{(3-2\ln x)(2+\ln x)} > 0$

SAVOIR

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
- On a : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Pour tous réels a et b strictement positifs : $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ et $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

SOLUTIONS

1) a) $x = 2$ b) $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ c) $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

2) a) L'ensemble de définition de l'équation est $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$; nous trouvons : $x = 3x - 1$,

soit $x = \frac{1}{2}$, qui convient.

b) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. L'équation équivaut à : $\ln(x^2) = \ln\frac{1}{7^2} = \ln\frac{1}{49}$ D'où $x^2 = \frac{1}{49}$,

soit : $x \in \left\{-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right\}$; ces deux solutions conviennent

3) a) L'ensemble de définition est $\left]\frac{1}{2};4\right[$ (les conditions sont : $x+2>0$, $2x-1>0$, $4-x>0$)

Résolvons : $\ln(x+2)=\ln((2x+1)(4-x))$

$\Leftrightarrow \ln(x+2)=\ln(-2x^2+9x-4) \Leftrightarrow x+2$

$=-2x^2+9x-4 \Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

Les solutions sont 1 et 3 $(1-4+3=0)$; elles conviennent toutes les deux.

b) L'ensemble de définition est $]0,+\infty[$; posons $X=\ln x$

Nous trouvons $X^2-7X+6=0$; les solutions en X sont 1 et 6. Donc $\ln x=1$ ou $\ln x=6$, soit $x=e$ *ou* $x=e^6$, solutions qui conviennent.

4) a) $S=]e^{-1};+\infty[\left(car\ -1=\ln\frac{1}{e}=e^{-1}\right)$

b) $S=\left]0;e^{\frac{2}{3}}\right]\left(car\ \frac{2}{3}=\ln\left(e^{\frac{2}{3}}\right)\right)$

c) $S=]0;8]\,(car\ 3\ln 2=\ln 8)$

5) a) L'ensemble de définition est $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ (les conditions sont : $x>0$ *et* $1-3x>0$)

Nous trouvons : $\ln(1-3x)\le\ln\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 1-3x\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow 0\le 3x^2-x+1(car\ x>0)$

Le discriminant étant négatif, $3x^2-x+1$ est toujours strictement positif. Nous en déduisons l'ensemble des solutions : $\left]0;\frac{1}{3}\right[$

b) L'ensemble de définition est $]0,+\infty[$. Posons $X=\ln x$

Nous trouvons $3X^2-8X+4<0$; cela équivaut à $X\in\left]\frac{2}{3};2\right[$

$\left(\Delta'=4 \text{ les racines sont donc } \frac{4-2}{3} \text{ et } \frac{4+2}{3}\right)$ Donc à $\frac{2}{3}<\ln x<2$, ou encore à $e^{\frac{2}{3}}<x<e^2$; l'ensemble des solutions est donc $\left]e^{\frac{2}{3}};e^2\right[$

c) L'ensemble est $]0,+\infty[-\{e^{3/2}, e^{-2}\}$ (les conditions sont : $x>0$, $\ln x\ne\frac{3}{2}$, $\ln x\ne -2$)

Le tableau suivant résume la discussion :

x	0 e^{-2}	1	$e^{3/2}$	2e	$+\infty$
$x-2e$	−	−	−	−	+
$\ln x$	−	−	+	+	+
$3-2\ln x$	+	+	+	−	−
$2+\ln x$	−	+	+	+	+
quotient	−	+	−	+	−

L'ensemble des solutions est : $]e^{-2};1[\cup]e^{3/2};2e[$



Déterminer les limites en ∞ des fonctions ln

ENONCES

Trouvez les limites éventuelles en $+\infty$ des fonctions f suivantes :

a) $x \mapsto x - \ln x$

b) $x \mapsto (\ln x)^2 - \sqrt{x}$

c) $x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

d) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln x}$

e) $x \mapsto x\ln x - (\ln x)^2$

f) $x \mapsto \dfrac{x}{x-\ln x}$

g) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)$

SAVOIR

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour tous entiers naturels n et m non nuls : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$

SOLUTIONS

a) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(1-\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0}\right)}_{1} = +\infty$,

b) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2}\right)}_{+\infty}\right)}_{-\infty} = -\infty$

En effet : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{\frac{(\ln y)^2}{y}} = +\infty$ *où* $y=\sqrt{x}$ $\left(\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{(\ln y)^2}{y} = 0^+\right)$

c) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}-1} = \lim\limits_{y\to1}\dfrac{\ln y}{y-1} = 1$ où $y = 1+\dfrac{1}{x}$

d) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\ln x}{x^2}} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0^+\right)$

e) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2\left(\dfrac{x}{(\ln x)^2}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}_{0^+}}-1\right)}_{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0}} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{3x+1}{x-2} = \ln 3$



Trouver la limite en un point de la fonction ln

ENONCES

Trouvez la limite éventuelle en x_0 des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$; $x_0 = 0$

b) $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x - 1}$, $x_0 = e$

c) $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x-1}$, $x_0 = 1$

d) $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{x}$, $x_0 = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

e) $f : x \mapsto x^2(\ln^2 x - x^3)$; $x_0 = 0^+$

f) $f : x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^3$; $x_0 = 0^+$

SAVOIR

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Pour tous entiers naturels n et m non nuls : $\lim_{x\to 0^+} x^n(\ln x)^m = 0$

SOLUTIONS

a) $\lim_0 f = \lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x)}{1-x-1} = \lim_{x\to 1} -\underbrace{\left(\frac{\ln y}{y-1}\right)}_{1} = -1$ où $y = 1-x$

b) $\lim_{e^-} f = \lim_{x\to e^-} \frac{1}{\underbrace{\ln x - 1}_{0^-}} = -\infty$ et $\lim_{e^+} f = \lim_{x\to e^+} \frac{1}{\underbrace{\ln x - 1}_{0^+}} = +\infty$; $\lim_{e^-} f \neq \lim_{e^+} f$

et donc f n'a pas de limite en e.

c) $\lim_1 f = \lim_{x\to 1} x\frac{\ln x}{x-1} = 1$ car $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

d) $\lim_0 f = \lim_{x\to 0} a\frac{\ln(1+ax)}{1+ax-1} = \lim_{y\to 1} a\underbrace{\left(\frac{\ln y}{y-1}\right)}_{1} = a$ où $y = 1+ax$

e) $\lim_{0^+} f = \lim_{0^+} \underbrace{x^2\ln^2 x}_{0} - x^5 = 0$

f) $\lim_{0^+} f = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(2\ln\sqrt{x}\right)^3 = \lim_{y\to 0^+} 8\underbrace{y(\ln y)^3}_{0} = 0$ avec $y = \sqrt{x}$

Objectif 6 Montrer qu'une droite donnée est une asymptote d'une fonction ln

ENONCES

Démontrer que les droites dont les équations sont données sont asymptotes, en $+\infty$, aux courbes représentant les fonctions f associées.

a) $x \mapsto -x + \ln \frac{ex}{x+1}$, $y = -x + 1$

b) $x \mapsto 3x - 1 - \ln\left(\frac{2x}{x+7}\right)$, $y = 3x - 1 - \ln 2$

SAVOIR

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$)

SOLUTIONS

a) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x+1) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{ex}{x+1}\right) - 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\ln e}_{1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - 1 = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

b) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (3x - 1 - \ln 2) = \lim_{x \to +\infty} -\ln\left(\frac{2x}{x+7}\right) + \ln 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\left[\ln 2 + \ln \frac{x}{x+7}\right] + \ln 2 = \lim_{x \to +\infty} -\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+7}\right)}_{1} = 0$$



Calculer la dérivée d'une fonction ln

ENONCES

Trouver les dérivées des fonctions proposées sur chacun des intervalles sur les quelles elles sont dérivables.

a) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ b) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(3-x)}$ c) $\ln^2 x + \ln\left(x^2+1\right)$

SAVOIR

Pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln|u(x)|$ alors f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

SOLUTIONS

a) f est dérivable si et seulement si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ donc f est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x^2}$$

b) f est dérivable si et seulement si $(x+2>0\ ,\ 3-x>0$ et $3-x \neq 1)$ donc f est dérivable sur $]-2;2[\cup]2;3[$ et pour tout $x \in]-2;2[\cup]2;3[$,

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{x+2}\right)\ln(3-x) - \ln(x+2)\left(\dfrac{-1}{3-x}\right)}{[\ln(3-x)]^2} = \frac{(3-x)\ln(3-x)+(x+2)\ln(x+2)}{(x+2)(3-x)[\ln(3-x)]^2}$$

c) f est dérivable si et seulement si $x > 0$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x + \frac{2x}{\ln\left(x^2+1\right)} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2x}{\ln\left(x^2+1\right)}$$



Déterminer la primitive d'une fonction en utilisant la fonction ln

ENONCES

Déterminer dans chacun des cas suivant la primitive F de f sur I qui s'annule en x_0.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $I=\mathbb{R}$ et $x_0=0$

b) $f(x)=\tan x$, $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x_0=0$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $I=]1;+\infty[$ et $x_0=2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $I=]1;+\infty[$ et $x_0=e$

SAVOIR

Si u est une fonction dérivable, non nulle et a dérivée continue sur un intervalle I alors une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x\mapsto\ln|u(x)|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

SOLUTIONS

c) $f(x)=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+2\dfrac{1}{x-1}=1+2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x-1$ donc $F(x)=x+2\ln(x-1)+c$.

$F(2)=2+c=0\Rightarrow c=-2$ et donc $F(x)=x+2\ln(x-1)-2$

d) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=\ln x$ donc $F(x)=\ln(\ln x)+c$.

$F(e)=c=0$ et donc $F(x)=\ln(\ln x)$



Calculer une intégrale d'une fonction ln

ENONCES

Calculer les inégalités ci-dessous :

a) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$, b) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$, c) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$

SAVOIR

☞ f est une fonction continue sur [a, b] et F une primitive de f sur [a, b] alors

$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

☞ Soients u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tout réels a et b de I on a :

$\int_a^b u(x).v'(x)\, dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\, dx$

c'est la formule d'intégration par parties

SOLUTIONS

a) On pose $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x \\ v(x) = x \end{cases}$

et donc par une intégration par parties on a : $\int_1^e \ln^2 x\, dx = \underbrace{[x\ln^2 x]_1^e}_{e} - 2\int_1^e \ln x\, dx = e - 2\underbrace{[x\ln x - x]_1^e}_{1} = e - 2$

b) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

et donc par une intégration par parties on a : $\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \underbrace{\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e}_{\frac{e^3}{3}} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\underbrace{\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e}_{\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{2e^3+1}{9}$

c) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases}$

et donc par une intégration par parties on a : $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx = \underbrace{\left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2}_{\ln\frac{8}{9}} - \int_1^e \frac{1}{x+1}\, dx = \ln\frac{8}{9} - \underbrace{[\ln(x+1)]_1^2}_{\ln\frac{3}{2}} = \ln\frac{16}{27}$



Etudier une fonction ln

ENONCES

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0)=0$ et $f(x)=x\ln x$ pour tout $x>0$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f

d) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=e$

SOLUTIONS

a) $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0. Les fonctions $x \mapsto x$ et $\ln$ sont continues sur $]0;+\infty[$ donc leur produit f est continue sur $]0;+\infty[$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}_+$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\mathscr{C}$ admet en O une demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

c) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout

$x>0$, $f'(x)=\ln x+1$ qui s'annule en e^{-1} $\qquad \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$-e^{-1}$	↗ $+\infty$

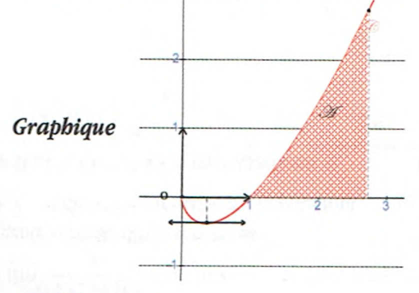
$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

Pour $x>0$; $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en son point d'abscisse 1

Graphique



$\mathscr{A} = \int_1^e x\ln x \, dx \;\; u.a$

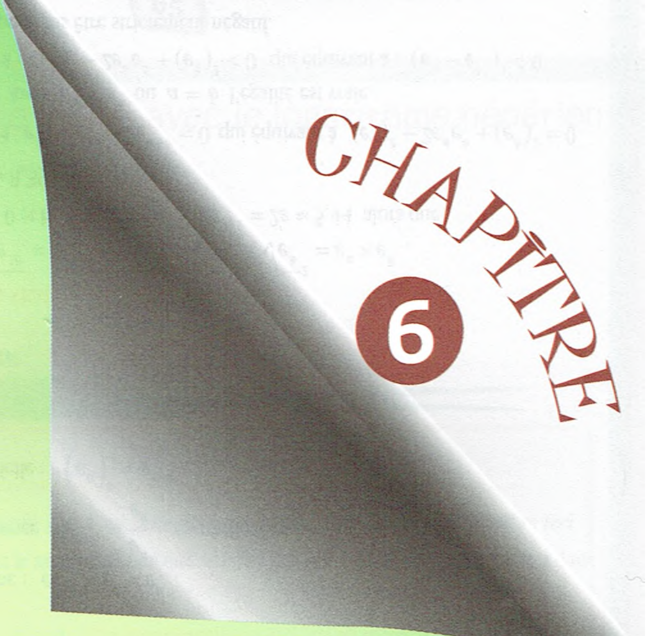
On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Par une intégration par parties on a :

$\mathscr{A} = \left[\dfrac{x^2}{2}\lim\right]_1^2 - \dfrac{x}{2}dx$

$= \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e$

$= \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{e^2+1}{4}$



FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES



Simplifier des écritures

ENONCES

Préciser si chacune des affirmations est « *VRAIE* » ou « *FAUSSE* »

1) Pour tout nombre a et tout nombre b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.

2) Pour tout nombre réel a et tout réel b : $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

3) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

4) Il existe un nombre réel a et un nombre réel b tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$.

SAVOIR

- Exponentielle d'une somme : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- Exponentielle d'une différence : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; en particulier : $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$.
- Puissance d'une exponentielle : $\left(e^a\right)^b = e^{a\times b}$.

SOLUTIONS

1) VRAI ; *2)* FAUX ; *3)* VRAI ; *4)* FAUX

1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$ et $\sqrt{e^{2a} \times e^{2b}} = \sqrt{e^{2a}} \times \sqrt{e^{2b}} = \sqrt{e^a}^2 \times \sqrt{e^b}^2 = e^a \times e^b$.

2) contre-exemple : avec $a = 0$ et $b = 1$ on obtient $2e^{0+1} = 2e \approx 5,44$ alors que $e^{2\times 0} + e^{2\times 1} = e^0 + e^2 = 1 + e^2 \approx 8,39$

3) $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$ équivaut à $e^{2a} + e^{2b} - 2e^{a+b} = 0$ qui équivaut à $(e^a)^2 - 2e^a e^b + (e^b)^2 = 0$ qui équivaut à $(e^a - e^b)^2 = 0$ Avec $e^a = e^b$ ou $a = b$ l'égalité est vraie.

4) $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$ équivaut à : $(e^a)^2 - 2e^a e^b + (e^b)^2 < 0$ qui équivaut à : $(e^a - e^b)^2 < 0$
C'est impossible car un carré ne peut pas être strictement négatif.

Objectif 2 Faire le lien avec le logarithme népérien

ENONCES

Simplifier les nombres suivants : $e^{-\ln\frac{1}{8}}$; $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$; $e^{\frac{1}{2}\ln 4}$; $e^{-\ln(\ln(3))}$.

SAVOIR

- La fonction exponentielle, notée $\exp x$ est la fonction qui, à chaque réel x associe le nombre réel strictement positif e^x où e est le nombre réel tel que $\ln e = 1$. ($e \simeq 2{,}718\,281\,828........$). On a donc pour tout réel x : $\exp x = e^x$.
- Pour tout réel x on a : $e^x > 0$. Une exponentielle est TOUJOURS strictement positive.
- Pour tout réel x et tout réel y strictement positif on a : $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- Pour tout réel x on a : $\ln e^x = x$
- Pour tout réel x strictement positif on a : $e^{\ln x} = x$.

SOLUTIONS

• $e^{-\ln\frac{1}{8}} = e^{\ln 8} = 8$ • $e^{\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right)} = e^{\ln 2} = 2$ • $e^{-\ln\frac{1}{8}} = \frac{1}{\ln 3}$ • $e^{-\ln(\ln(3))} = e^{\ln(\frac{1}{\ln(3)})} = \frac{1}{\ln(3)}$



Résoudre des équations et des inéquations

ENONCES

Résoudre dans IR, les équations et les inéquations suivants :

a) $e^{-x+7}=e^{x+3}$;

b) $e^{x}+e^{-x}=0$;

c) $e^{2x}\leq 1$;

d) $e^{2x}+2e^{x}<3$.

SAVOIR

La fonction $f(x)=e^{x}$ est strictement croissante sur IR. Donc pour tous réels a et b :

✓ $a=b \Leftrightarrow e^{a}=e^{b}$; $a<b \Leftrightarrow e^{a}<e^{b}$

En particulier : $e^{a}=1 \Leftrightarrow a=0$; $e^{a}>1 \Leftrightarrow a>0$; $0<e^{a}<1 \Leftrightarrow a<0$

SOLUTIONS

a) L'équation est définie sur IR et $e^{-x+7}=e^{x+3} \Leftrightarrow -x+7=x+3 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow$ $S_{IR}=\{2\}$

b) $e^{x}+e^{-x}=0 \Rightarrow S_{IR}=\emptyset$

c) L'inéquation est définie sur IR et $e^{2x}\leq 1 \Leftrightarrow 2x\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 0 \Rightarrow S_{IR}=]-\infty\ ;\ 0]$

d) L'inéquation est définie sur IR et s'écrit $(e^{x})^{2}+2e^{x}-3<0$, c'ést à dire : $t^{2}+2t-3<0$, avec $t=e^{x}$

Or $t^{2}+2t-3<0 \Leftrightarrow -3<t<1$, donc : $(e^{x})^{2}+2e^{x}-3<0 \Leftrightarrow$

$-3<e^{x}<1 \Leftrightarrow 0<e^{x}<1 \Leftrightarrow x<0 \Rightarrow S_{IR}=]-\infty\ ;\ 0[$



Etudier des fonctions exponentielles

ENONCES

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{e^x - 1}$ sur IR*.

Montrer que f est une fonction impaire et en déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x + 4e^{-x}$ sur IR.

Montrer que $x = \ln 2$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ sur IR.

4) Montrer que $(0\ ; \frac{1}{2})$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x + 2)$ et c sa courbe représentative..

Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe c au voisinage de $+\infty$.

SAVOIR

☞ La courbe cf admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie dans un repère orthonormé si pour tout $x \in Df$:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}.$$

Si $a = 0$ La courbe cf admet l'axe $(O\ ; \vec{j})$ comme axe de symétrie.

☞ La courbe cf admet le point $\Omega(a\ ; b)$ comme centre de symétrie dans un repère orthonormé si pour tout $x \in Df$: $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$.

Si $a = 0$ et $b = 0$ La courbe cf l'origine O du repère comme centre de symétrie.

☞ Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$ on dit que la droite D : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à cf au voisinage de $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

SOLUTIONS

1) Pour tout $x \in IR^*$, $-x\ IR^*$, $f(-x) = -x - 1 - \frac{2}{e^{-x} - 1} = -x - 1 - \frac{-2e^x}{1 - e^x} = -x + \frac{1 - e^x + 2e^x}{e^x - 1}$

$f(-x) = -x + \frac{1 + e^x}{e^x - 1} = -x + \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} = -x + 1 + \frac{2}{e^x - 1} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire

$\Rightarrow D_E =]0; +\infty[$

2) *Pour* tout $x \in IR \Rightarrow 2\ln 2 - x \in IR$ et

$f(-x) = e^{2\ln 2 - x} + 4e^{-2\ln 2 + x} = e^{2\ln 2}e^{-x} + 4e^{-2\ln 2}e^x = e^{\ln 2^2}e^{-x} + 4e^{\ln 2^{-2}}e^x$

$= 2^2 e^{-x} + 4 \times 2^{-2} e^x = 4e^{-x} + \cancel{4} \times \frac{1}{\cancel{2^2}} e^x = 4e^{-x} + e^x = f(x)$

Donc $x = \ln 2$ est un axe de symétrie.

3) *Pour* tout $x \in IR \Rightarrow 2 \times 0 - x = -x \in IR$ et

$f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$

Donc $(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie

4) $f(x) - x = \ln\left[e^x(1 + 2e^{-x})\right] - x = \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-x}) - x = \cancel{x} + \ln(1 + 2e^{-x}) \cancel{- x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 2e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$



Comparer des fonctions

ENONCES

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.

2) Démontrer que l'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas d'autre solution dans IR que zéro.

SAVOIR

☞ Pour résoudre des équations ou des inéquations $f(x) = g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, il est quelquefois utile d'étudier les variations de la fonction $f - g$.

☞ Penser au théorème des valeurs intermédiaires pour résoudre les équations de la forme $f(x) = k$ avec k réel.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \; (n \geq 1) \; ; \; \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

SOLUTIONS

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - 1 - x$. f est dérivable comme somme de deu: fonction dérivables (la fonction exponentielle et une fonction affine) $f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$; $f(0) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1) = +\infty$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

La fonction f presente un minimum absolu égal à zero donc pour tout réel x, $f(x) \geq 0$ et par suite pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$

2) Pour démontrer que l'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a qu'une solution dans IR, on étudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = f(x) - \frac{x^2}{2}$.

g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables :

pour tout $x \in$ IR $g'(x) = f'(x) - x = e^x - 1 - x = f(x)$.

D'après la question 1), $f(x) \geq 0$ pour tout x de IR et f ne s'annule que pour la valeur de zéro.

Donc la fonction g continue est strictement croissante sur IR.

et $g(\text{IR}) = \left] \lim_{x \to -\infty} g(x) \,;\, \lim_{x \to +\infty} g(x) \right[$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

donc $g(\text{IR}) = \left] \lim_{x \to -\infty} g(x) \,;\, \lim_{x \to +\infty} g(x) \right[= IR$ or $0 \in$ IR. Donc $g(x) = 0$ admet une unique solution et $g(0) = 0$.

$\Rightarrow$ L'équation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas d'autre solution dans IR que zéro.



Simplifier des expressions algébriques contenant des puissances

ENONCES

Simplifier au maximum l'écriture des réels suivants :

$A = 5^{\frac{2}{3}} \sqrt[6]{25}$; $B = \dfrac{2 - \ln \sqrt[3]{e}}{1 + \ln e^2}$

SAVOIR

En utilisant la définition pour $x \in]0 ; +\infty[$; $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \geq 2)$ puis les règles de calcul sur les exposants.

SOLUTIONS

$A = 5^{\frac{2}{3}} \times (25)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5$

$B = \dfrac{2 - \ln e^{\frac{1}{3}}}{1 + \ln e^2} = \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2} = \dfrac{\frac{5}{3}}{3} = \dfrac{5}{9}$

CHAPITRE

7

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Objectif 1

Résoudre une équation différentielle du type $y'=Ky \quad (K\in\mathbb{R})$

ENONCES

Trouver les solutions qu'admet l'équation différentielle $y' + y\ln 5 = 0$ sur $\mathbb{R}$

SAVOIR

☞ Soit K un nombre réel, résoudre l'équation différentielle $y' = Ky$ consiste à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel x, $f'(x) = K f(x)$.

☞ Les solutions de l'équation différentielle $y' = K y$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C e^{Kx}$ où $C\in\mathbb{R}$.

Pour tout couple $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$, l'équation $y' = Ky$ admet une solution f et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

SOLUTIONS

$$y' + y\ln 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -y\ln 5$$
$$\Leftrightarrow y' = y\ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

On reconnaît que cette équation est de la forme $y' = Ky$, ses solutions sont donc les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = c\, e^{x\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \quad où\ c\in\mathbb{R}$$
$$= c\,(e^{\ln\frac{1}{5}})^x \quad où\ c\in\mathbb{R}$$
$$= c\left(\frac{1}{5}\right)^x \quad où\ c\in\mathbb{R}$$

Objectif 2

Résoudre une équation du type $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$

ENONCES

Trouver la solution de qu'admet l'équation différentielle $4y' - y = 6$ qui prend la valeur 4 en 0.

SAVOIR

Les solutions l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = C \ e^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

SOLUTIONS

Cette équation peut s'écrire sous la forme $y' = \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}$, elle est de la forme $y' = ay + b$ $(a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{2})$, ses solutions sont donc les fonctions :

$f : x \to f(x) = C \ e^{ax} - \frac{b}{a}$, soit dans notre cas :

$$f : x \to f(x) = C \ e^{\frac{1}{4}x} - 6 \qquad où\ C \in \mathbb{R}$$

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de la constante C grâce à la condition initiale imposée $f(0) = 4$ on a donc : $C - 6 = 4$ soit $C = 10$

La fonction f cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 10 \ e^{\frac{1}{4}x} - 6$

Objectif 3 — Résoudre une équation différentielle du 1er ordre avec second membre

ENONCES

Résolution de (E) : $y' + 2y = e^x + 3$

a) Résoudre l'équation (E') : $y' + 2y = 0$

b) Déterminer a et b de façon à ce que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ae^x + b$ soit solution de (E).

c) Montrer que f est solution de (E) ***si et seulement si*** (f – g) est solution de (E').

d) En déduire les solutions de (E).

SAVOIR

L'énoncé introduit une équation différentielle avec second membre et pose des questions destinées à le résoudre. Ces questions sont pratiquement les mêmes, mais n'est pas forcément le même ordre que celui donné dans le principe suivant :

Principe : pour résoudre l'équation avec second membre (E) , on demande de :

a) Résoudre l'équation sans second membre (E')

b) Montrer qu'une fonction g est solution de (E)

c) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si (f – g) est solution de (E').

d) En déduire les solutions de (E).

SOLUTIONS

a) On applique la propriété du cours, on trouve que les solutions de (E') sont les fonctions
$f_K(x) = K e^{-2x}$, $K \in \mathbb{R}$

b) Le principe de ce genre de question est de remplacer y par g et d'identifier alors les constantes.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = ae^x$, on en déduit que :
$f'(x) + 2f(x) = ae^x + 2(ae^2 + b) = 3ae^x + 2b$, f sera donc solution de (E) si:
$3ae^x + 2b = e^x + 3$, c'est-à-dire, si a et b vérifient :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = 3 \end{cases}$$ C'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$; on a donc : $g(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$

c) (f – g) est solution de (E') $\Leftrightarrow (f-g)'(x) + 2(f-g)(x) = 0$
$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x) = e^x + 3$ (car g est solution de (E'))
$\Leftrightarrow$ f est solution de (E).

d) f solution de (E) $\Leftrightarrow$ (f – g) solution de (E') $\Leftrightarrow f - g = f_K$
$\Leftrightarrow$ f est définie par : $f(x) = f_K(x) + g(x) = Ke^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$.

Objectif 4

Résoudre une équation différentielle du second ordre

ENONCES

Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$

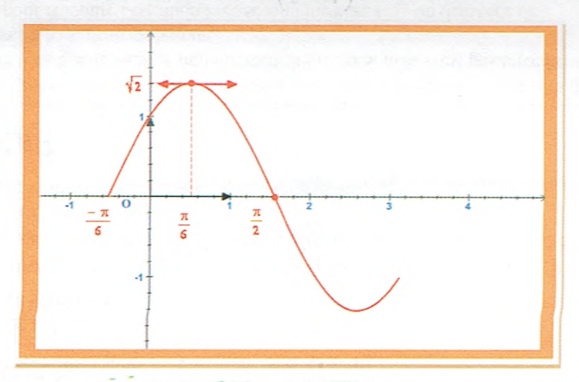
1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) Soit f la fonction qui est une solution de l'équation différentielle (E), et dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous. On sait que la courbe (C) passe par $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$ et qu'elle admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

a) Donner les conditions initiales sur la fonction f par lecture graphique.

b) Donner l'expression de f.

3) Vérifier que pour tout réel t , $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.



SAVOIR

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0 (\omega \in \mathbb{R})$
est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, $A , B \in \mathbb{R}$



SOLUTIONS

1) $f(t) = A\cos(\frac{3}{2}t) + B\sin(\frac{3}{2}t)$; $A, B \in \mathbb{R}$ ($(E) : y'' + (\frac{3}{2})^2 y = 0$)

2) a) $f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}$; $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(-\frac{\pi}{6}) = 0$; $f'(\frac{\pi}{6}) = 0$

$\begin{cases} f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \\ f'(\frac{\pi}{6}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B \\ A - B = 0 \end{cases}$ ($f'(t) = -\frac{3}{2}A\cos(\frac{3}{2}t) + \frac{3}{2}B\sin(\frac{3}{2}t)$)

$\Leftrightarrow A = B = 1$

Ainsi $f(t) = \cos(\frac{3}{2}t) + \sin(\frac{3}{2}t)$

3) $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d'où $c = \frac{\pi}{4}$

Ainsi $f = r\cos(\frac{3}{2}t - c) = \sqrt{2}\cos(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4})$

CHAPITRE 8

NOMBRES COMPLEXES





Ecrire un nombre complexe sous forme algébrique

ENONCES

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{2+5i}{7-i}$; b) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{i}{2}$; c) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; d) $(2+3i)^2$; e) $(5-i)^4$; f) $(1+i)^{2010}+(1-i)^{2011}$

SAVOIR

Pour tous réels x et y : $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$; le conjugué de $z = x + iy$ est $\bar{z} = x - iy$.

$i^2=(-i)^2=-1$ et $i(-i)=1$ | $\dfrac{1}{i}=-i$ et $\dfrac{1}{-i}=i$ | $(1+i)^2=2i$ et $(1-i)^2=-2i$

Nous multiplierons le numérateur et le dénominateur des quotients par le conjugué du dénominateur.

$(x \pm iy)^2 = (x^2-y^2) \pm 2ixy$ | $i^{4n+r} = \Big(\underbrace{i^4}_{1}\Big)^n \times i^r = i^r$ pour tout $(n,r) \in \mathbb{N}^2$

Les règles d'addition, de multiplication et de puissances connues dans $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$.

SOLUTIONS

a) $\dfrac{2+5i}{7-i}=\dfrac{(2+5i)(7+i)}{(7-i)(7+i)}=\dfrac{9}{50}+\dfrac{37}{50}i$

b) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{i}{2}=2(-i)+\dfrac{1}{2}i=\left(-2+\dfrac{1}{2}\right)i=-\dfrac{3}{2}i$

c) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i-2i}{2}=0$

d) $(2+3i)^2=4-9+2i\times 6=-5+12i$

e) $(5-i)^4=25-1-2i\times 5=24-10i$

f) $\left((1+i)^2\right)^{1005}+\left((1-i)^2\right)^{1005}(1-i)^1=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}(1-i)$

$=2^{1005}\,i^{1005}(1-1+i)=2^{1005}\,i^{\overbrace{1006}^{4\times 251+2}}=-2^{1005}$



Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique

ENONCES

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z = 2\cos\frac{\pi}{5} - 2i\sin\frac{\pi}{5}$; $z' = -\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$ *et* $z'' = \sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}$

SAVOIR

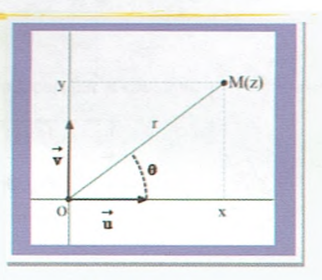
☞ Soit M(z) un point du plan distinct de O.($z \neq 0$)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z

r est le module de z, on note : $r = |z|$ $(r > 0)$;

θ est un argument de z, on note : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

Dire que $M(r,\theta)$ a pour coordonnées polaires (r,θ) signifie que : $\begin{cases} r = OM \\ (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$



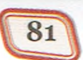
☞ Pour tout réel x, on a : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$

SOLUTIONS

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$z' = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$z'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}$$





Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle

ENONCES

1) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z=\sqrt{6}-i\sqrt{2},\ z'=\frac{i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\ et\ z''=\frac{-\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)^2}{(1+i)^6}$$

2) Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Mettre sous forme exponentielle

$$z_1=\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\ ,\ z_2=\cos x-\sin x+i(\cos x+\sin x)\ \text{et}\ z_3=(i+\tan x)^2$$

SAVOIR

On note : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ *par conséquence on a : pour tout* $z\in\mathbb{C}^*$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]=re^{i\theta}$ forme exponentielle de z

Cohérence et efficacité de cette notation : L'avantage de cette notation est que, connaissant déjà beaucoup de propriétés de la fonction puissance, nous allons pouvoir « en oublier » la plupart de celles des arguments. En effet, les propriétés suivantes nous permettra d'en retrouver la grande majorité, voire de les utiliser sans s'en rendre compte

Propriétés :

$$\cos\theta-i\sin\theta=\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}\qquad e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}\qquad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}\ \text{formule de Moivre}$$

Remarques : $e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$ $e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=1$

Une écriture $re^{i\theta}$ *est une forme exponentielle ssi* $r>0$

Retenons : $1=e^{i0}\ ,\ -1=e^{i\pi}\ ,\ i=e^{i\frac{\pi}{2}},\ -i=e^{-i\frac{\pi}{2}},\ 1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $-1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

SOLUTIONS

1) $|z|=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $z=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$z'=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}\text{ et } z''=\frac{e^{i\pi}\left(2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6}=\frac{e^{i\pi}\times 8e^{-i\frac{\pi}{3}}}{8e^{i\frac{3\pi}{2}}}=e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

2) $$z_1=\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}=\frac{1+i\,\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1-i\,\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{e^{ix}}{e^{-ix}}=e^{i(x+x)}=e^{i2x}$$

$$z_2=\cos x-\sin x+i\cos x+i\sin x=\cos x+i\sin x+i\cos x-\sin x$$

$$=e^{ix}+i(\cos x+i\sin x)=e^{ix}+i\,e^{ix}=(1+i)e^{ix}$$

or $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ alors $z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{ix}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$$z_3=\left(\frac{i}{\cos x}(\cos x-i\sin x)\right)^2=\frac{-1}{\cos^2 x}\left(e^{-ix}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}e^{i\pi}\,e^{-i2x}=\frac{1}{\cos^2 x}e^{i(\pi-2x)}$$

Objectif 4

Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour simplifier et linéariser des polynômes trigonométriques

ENONCES

1) θ désigne un réel.

a) Exprimer $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$

b) Exprimer $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$

2) Linéariser

a) $\sin^4\theta$ b) $\cos^2\theta\sin\theta$ c) $\sin^2\theta\cos\theta$ (vous pouvez utiliser b)

SAVOIR

☞ ***Formule de Moivre :*** Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ *et* $n\in\mathbb{N}$, $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

Formule de binôme : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *et* $n\in\mathbb{N}$, $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

Exemple : Pour $n=4$, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

☞ ***Formules d'Euler :*** $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta$ et $\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta$ ou $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ et $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

SOLUTIONS

1) $\cos 4\theta+i\sin 4\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$ d'après la formule de Moivre.

Développons : $(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos^4\theta+4i\cos^3\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta-4i\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta$

Donc $(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\underbrace{\left(\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\right)}_{\text{Partie réelle}}+i\,\underbrace{4\left(\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta\right)}_{\text{Partie imaginaire}}$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on trouve :

a) $\cos 4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\left(1-\cos^2\theta\right)^2=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

b) $\sin 4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$

2)

a) $\sin^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{i\theta} - 4e^{i3\theta}e^{i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} - 4\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right) + 6\right)$

$= \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}\right) + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta - \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

b) $\cos^2\theta\sin\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2\left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) = \dfrac{1}{8i}\left(e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta}\right)\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \dfrac{1}{8i}\left(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} + \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) = \dfrac{1}{4}(\sin 3\theta + \sin\theta) = \dfrac{1}{4}\sin 3\theta + \dfrac{1}{4}\sin\theta$

c) $\sin^2\theta\cos\theta = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Utilisons le résultat de b) , en remplaçant θ par $\dfrac{\pi}{2} - \theta$:

$\sin^2\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 3\theta\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$

$= -\dfrac{1}{4}\cos 3\theta + \cos\theta$



Ecrire $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ sous forme exponentielle

ENONCES

Soient θ *et* θ' deux nombres réels.

a) Transformer $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ en factorisant par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ sous la forme $r e^{i\varphi}$ où r *et* φ sont des réels

b) En déduire la forme exponentielle des nombres complexes $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z' = e^{i\frac{4\pi}{7}} - 1$ *et* $z'' = e^{-i\frac{5}{9}} + i$

SAVOIR

Appliquer les formules d'Euler

$$e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} = \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \pm e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

SOLUTIONS

a) $$e^{i\theta} + e^{-i\theta'} = \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

b) $$z = e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i0} = 2\cos\frac{\pi}{10} e^{i\frac{\pi}{10}} \cdot \cos\frac{\pi}{10} > 0 \; car \; \frac{\pi}{10} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$z' = e^{i\pi} + e^{i\frac{4\pi}{7}} = 2\cos\frac{3\pi}{14} e^{i\frac{11\pi}{14}} \cdot \cos\frac{3\pi}{14} > 0 \; car \; \frac{3\pi}{14} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$z'' = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{5\pi}{9}} = 2\cos\frac{19\pi}{36} e^{-i\frac{\pi}{36}} = -2\cos\frac{19\pi}{36} e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{36}\right)} = -2\cos\frac{19\pi}{36} e^{i\left(\frac{35\pi}{36}\right)} \cdot \cos\frac{19\pi}{36} < 0 \; car \; \frac{19\pi}{36} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Objectif 6

Résoudre des équations complexes du second degré

ENONCES

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2-6z+10=0$ b) $z^2+i\sqrt{3}\,z-i=0$ c) $z^2-2(1+2i)z-3+2i=0$

2) Soit θ un réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$

3) Soit $a\in\mathbb{C}$. Vérifier que $z'=a+i$ est solution de l'équation $z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ puis déterminer l'autre solution z''.

SAVOIR

☞ Soit a, b et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$. L'équation $az^2+bz+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) $z=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$ *avec* $\Delta=b^2-4ac=\delta^2$

☞ Soit a, b' et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$. L'équation $az^2+2b'z+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) $z=\dfrac{-b'\pm\delta'}{a}$ *avec* $\Delta'=b'^2-ac=\delta'^2$

☞ Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2-y^2\pm 2ixy=(x\pm iy)^2$

Soit a, b et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$. Si z' et z'' sont solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors $z'+z''=-\dfrac{b}{a}$ et $z'z''=\dfrac{c}{a}$

SOLUTIONS

1) a) $z^2-6z+10=0$; $\Delta'=9-10=-1=i^2$ donc $\delta'=i$ et les solutions sont $3+i$ et $3-i$

b) $z^2+i\sqrt{3}\,z-i=0$; $\Delta=-3+4i=1^2-2^2+2i\times1\times2=(1+2i)^2$ donc $\delta=1+2i$ et les solutions sont :

$\dfrac{-i\sqrt{3}+1+2i}{2}=\dfrac{1}{2}+i\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\dfrac{-i\sqrt{3}-1-2i}{2}=\dfrac{-1}{2}-i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$

c) $z^2-2(1+2i)z-3+2i=0$; $\Delta'=(1+2i)^2+3-2i=2i=(1+i)^2$ donc $\delta'=1+i$

et les solutions sont : $1+2i+1+i=2+3i$ *et* $1+2i-1-i=i$

2) $a=1$; $b'=i\sin\theta$; $c=-2i\sin\theta$;

$$\Delta'=b'^2-ac=-\sin^2\theta+2i\cos\theta=\cos^2\theta-1+2i\cos\theta=(\cos\theta+i)^2$$

donc $\delta'=\cos\theta+i$ et les solutions sont :

$-i\sin\theta+\cos\theta+i=\cos\theta+i(1-\sin\theta)$ et $-i\sin\theta-\cos\theta-i=-\cos\theta-i(1+\sin\theta)$

3) $(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+(1+a^2)i$

$$=a^2-1+2ai-a-ia+1-i-a^2-ai-a^2i+a+i+a^2i=0$$

Donc z' est une solution de l'équation

On a $z'+z''=(1+a)(1+i)=1+i+a+ai$ donc $z''=1+i+a+ai-z'=1+ai$

Objectif 7 — Résoudre des équations complexes de troisième degré

ENONCES

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i) z^2 + 4(1 + i\sqrt{3}) z - 8i = 0$.

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).

SAVOIR

Un nombre complexe z_0 est une racine d'un polynôme P de degré un entier naturel non nul n et à coefficients complexes si et seulement si $P(z_0) = 0$ si et seulement s'il existe un polynôme Q de degré n-1 et à coefficients complexes tel que $P(z) = (z - z_0) \times Q(z)$

SOLUTIONS

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. yi est une solution de *(E)* si et seulement si

$(yi)^3 - 2(\ 3 + i)(yi)^2 + 4(1 + i\ 3)(yi) - 8i = 0$

soit $-iy^3 + 2y^2(\sqrt{3} + i) + 4yi(1 + i\sqrt{3}) - 8i = 0$

soit $(2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y) + i(-y^3 + 2y^2 + 4y - 8) = 0$ qui équivaut à

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}y(y-2) = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 2 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$$

b) Donc 2i est une solution imaginaire de l'équation *(E)*

$z^3 - 2(\sqrt{3} + i) z^2 + 4(1 + i\sqrt{3}) z - 8i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + (b - 2ia)z + (c - 2ib)z - 2ic$

Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = -2(\sqrt{3} + i) \\ c - 2ib = 4(1 + i\sqrt{3}) \\ -2ic = -8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases}$

D'où *(E)* $\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = \sqrt{3} - i$ ou $z = \sqrt{3} + i$ $(\Delta = -1 = i^2)$



Déterminer les racines nièmes d'un nombre complexe

ENONCES

1) Déterminer les racines carrées de $9+40i$ et les racines quatrièmes de $-7-24i$

2) Déterminer a) les racines cubiques de l'unité b) Les racines quatrièmes de $16e^{i\frac{\pi}{3}}$

SAVOIR

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

La recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe $a+bi$ sous forme algébrique ça revient à déterminer un couple de deux réels (x,y) vérifiant $\begin{cases} 2xy=b \\ x^2-y^2=a \end{cases}$ et donc $x+iy$ est une racine de $a+bi$

- Les racines nièmes d'un nombre complexe non nul Z_0 sont les solutions de l'équation complexe : $z^n=Z_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
- L'équation $z^n=Re^{i\theta}$ (où $R>0$) admet exactement n solutions qu'on note z_k où $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ telles que $z_k=\sqrt[n]{R}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ (où $\sqrt[n]{R}$ est le réel positif qui puissance n égal à R)
- Les racines nième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n=1$ c'est-à-dire les z_k où $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ telles que $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

SOLUTIONS

1) $9+40i=5^2-4^2+2i\times5\times4=(5+4i)^2$ donc les racines carrées de $9+40i$ sont $5+4i$ et $-5-4i$

Comme $z^4=-7-24i\Leftrightarrow(z^2)^2=-7-24i$ alors les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont les racines carrées de ses racines carrées. Commençons par déterminer les racines carrées de $-7-24i$

$-7-24i=3^2-4^2-2i\times3\times4=(3-4i)^2$ donc les racines carrées de $-7-24i$ sont $3-4i$ et $-3+4i$

$3-4i=2^2-1^2-2i\times2\times1=(2-i)^2$ et $-3+4i=-(3-4i)=(i(2-i))^2=(1+2i)^2$

Donc les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont $2-i$, $-2+i$, $1+2i$ et $-1-2i$

2) a) Les racines cubiques de l'unité sont les $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k\in\{0,1,2\}$ soit : 1 , $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

b) Les racines quatrièmes de $16e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les $z_k=\sqrt[4]{16}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}$ où $k\in\{0,1,2,3\}$ soit :

$2e^{i\frac{\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{12}}$ et $2e^{i\frac{19\pi}{12}}$





Résoudre des équations avec changement de variable

ENONCES

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^4+5z^2+6=0$ b) $z^6+(1-i)z^3-i=0$ c) $1-\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$

SAVOIR

Soit a, b et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$.

Si $a+b+c=0$ alors 1 et $\frac{c}{a}$ sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Si $a-b+c=0$ alors -1 et $-\frac{c}{a}$ sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

SOLUTIONS

a) Posons $Z=z^2$; l'équation équivaut à : $Z^2+5Z+6=0$; il y a deux solutions, égale à -2 et -3, soit $2i^2$ *et* $3i^2$; il existe donc quatre solutions : $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$

b) Posons $Z=z^3$; l'équation équivaut à : $Z^3+(1-i)Z-i=0$; $(1-(1-i)-i=0)$ il y a deux solutions, égale à -1 et i, soit $e^{i\pi}$ *et* $e^{i\frac{\pi}{2}}$; de racines cubiques respectives $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$ il existe donc six solutions : $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) en posant $Z=\frac{z+i}{z-i}$ on se ramène à $1-Z+Z^2+Z^3=0$.

Or : $1-Z+Z^2-Z^3=(1-Z)(1+Z^2)$ Donc : $1-Z+Z^2-Z^3=0 \Leftrightarrow Z=1$ *ou* $Z^2=-1 \Leftrightarrow Z\in\{1, i, -i\}$

Par conséquent : $1-\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}\in\{1, i, -i\}$

De plus : $\frac{z+i}{z-i}=1 \Leftrightarrow z+1=z-i$ *et* $z\neq i \Leftrightarrow 2i=0$, ce qui absurde donc il n'y a pas de solution dans ce cas.

Puis : $\frac{z+i}{z-i}=i \Leftrightarrow z+i=i(z-i)$ et $z\neq i \Leftrightarrow z=1$ Enfin : $\frac{z+i}{z-i}=-i \Leftrightarrow z+i=-i(z-i)$ et $z\neq i \Leftrightarrow z=-1$

L'ensemble S des solutions de l'équation $1-\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$ est donc : $S=\{1, -1\}$





Interpréter algébriquement la colinéarité et l'orthogonalité de deux vecteurs

ENONCES

Trouver les ensembles des points M dont les affixes z vérifient les relations suivantes :

a) $\dfrac{iz+2}{z-1} \in \mathbb{R}$ b) $\dfrac{i\bar{z}+2}{\bar{z}-1} \in i\mathbb{R}$

SAVOIR

Théorème de rapport des affixes de deux vecteurs : Soit $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ deux vecteurs non nuls.

- $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{W_1}\right)}{aff\left(\overrightarrow{W_2}\right)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont colinéaires
- $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{W_1}\right)}{aff\left(\overrightarrow{W_2}\right)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont orthogonaux

Recherche d'ensemble des points géométriquement :

- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires est la droite (AB)
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ est le cercle de diamètre $[AB]$
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $AM = R$ est le cercle de centre A et de Rayon R.
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ est :
- L'arc orienté $\widehat{AB}$ privé de A et B du cercle tangent à $[AT)$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ si $\theta \in]-\pi, 0[$
- L'arc orienté $\widehat{BA}$ privé de A et B du cercle tangent à $[AT)$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \theta[2\pi]$ si $\theta \in]0, \pi[$
- La droite (AB) privée du segment $[AB]$ si $\theta = 0$
- Le segment $[AB]$ privé de A et B si $\theta = \pi$

SOLUTIONS

a) $\dfrac{iz+2}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{i(z-2i)}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} \in i\mathbb{R}$

avec $A(1)$ et $B(2i)$ ce qui signifie que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ M \neq A \end{cases}$ et donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$

privé de A $\dfrac{i\bar{z}+2}{\bar{z}-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{-iz+2}{z-1}\right)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{-iz+2}{z-1} \in i\mathbb{R}$

b) $\dfrac{-i(z+2i)}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -i\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} \in \mathbb{R}$ avec $A(1)$ et $B(-2i)$

ce qui signifie que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont colinéaires} \\ M \neq A \end{cases}$ et donc l'ensemble cherché est la droite (AB) privée de A

CHAPITRE

9

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE



Remettre en jeu les relations d'orthogonalité dans l'espace

ENONCES

Dans un repère orthonormé dans l'espace, on considère les points $A(1, 1, 3)$; $B\left(\sqrt{2}+1, 0, 2\right)$ et $C\left(\sqrt{2}+1, 2, 2\right)$.

Calculer AB, AC et l'angle $\widehat{CAB}$.
Que peut-on dire du triangle ABC ?

SAVOIR

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \widehat{BAC}$

- L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$;
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Pour tous points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, $MM' = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$

SOLUTIONS

$\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{2}, -1, -1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{2}, 1, -1\right)$.

D'où $AB^2 = AC^2 = 4$, $AB = AC = 2$, puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$.

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{CAB}$, nous obtenons $\cos \widehat{CAB} = \frac{1}{2}$; soit $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral.

Objectif 2 — Utiliser la notion du produit vectoriel pour montrer que des points de l'espace sont alignés ou coplanaires

ENONCES

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace. A(1, 1, 1) ; B(3, 4, -3) ; C(2, -3, 6) et D(2, 19, -22).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont – ils alignés ?
2. Calculer le produit scalaire $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$. Les points A, B, C et D sont – ils coplanaires ?

SAVOIR

☞ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini ainsi :

• Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$; • Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (direction) ;
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens) ;
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$ (norme).

☞ Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel α :

• $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; • $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$; • $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

☞ Soit $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans cette base sont telles que :

Si $\vec{u}\,(x,y,z)$ et $\vec{v}\,(x',y',z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\,(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$

☞ Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

De ce fait A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

☞ L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

• $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)\cdot\vec{w} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\cdot\vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

• $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = 0$.

SOLUTIONS

$\overrightarrow{AB}(2,3,-4)$, $\overrightarrow{AC}(1,-4,5)$ et $\overrightarrow{AD}(1,18,-23)$.

1. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1,-14,-11) \neq \vec{0} \Rightarrow$ A, B et C ne sont pas alignés.
2. $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = -1 - 252 + 253 = 0 \Rightarrow$ A, B, C et D sont coplanaires.



Mettre en œuvre la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan

ENONCES

Dans un repère orthonormé dans l'espace, on considère les points A(2, 1, - 1) ; $B(0,1,1)$ et $C(3,0,-2)$.
Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).

SAVOIR

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).
- Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

SOLUTIONS

Nous avons $\overrightarrow{AB}(-2,0,2)$ et $\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$, d'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,0,2)$. Ainsi $\vec{n}(1,0,1)$ est normal au plan (ABC). Avec $M(x,y,z)$, la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit alors $x + z - 1 = 0$ (équation du plan (ABC)).

Objectif 4

Appliquer la notion du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace pour calculer des aires, des volumes et des distances

ENONCES

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(-1, 4, 5) ; B(0, 1, 1) ; C(1, 4, 0) et D(-3, 5, 0).

1. Calculer l'aire du triangle BCD
2. Calculer le volume du tétraèdre ABCD puis la distance de A au plan (BCD).

SAVOIR

- Lorsque ABC est un triangle, on a établit en deuxième que l'aire S de ABC est donné par : $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$
- Ce qui s'écrit : $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left|\sin\widehat{BAC}\right| \Rightarrow$ Aire $(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$
- De même en présence d'un parallélogramme ABCD, on a : Aire (ABCD) $=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.
- Le volume d'un tétraèdre ABCD est $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BA}\right|$
- La distance d'un point A à la droite $D\left(B,\vec{u}\right)$ est $d=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

SOLUTIONS

1. $\overrightarrow{BC}(1,3,-1)$ et $\overrightarrow{BD}(-3,4,-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}(1,4,13) \Rightarrow$ Aire $(BCD)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=\frac{\sqrt{186}}{2}$

2. Le volume de ABCD est $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BA}\right|$ $\overrightarrow{BA}(-1,3,4) \Rightarrow V=\frac{63}{6}=\frac{21}{2}$

On peut considérer le volume comme étant $V=\frac{1}{3}\times Aire(BCD)\times d(A,(BCD)) \Rightarrow d(A,(BCD))=\frac{21\sqrt{186}}{62}$

NB : si $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ et P : $ax+by+cz+d=0$ alors $d(A,P)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Cherchons l'équation du plan (BCD) : $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}(1,4,13)$ vecteur normal

- (BCD) : x + 4y + 13z + d = 0 et B (0, 1, 1) ∈ (BCD) ⇒ d = - 17

⇒ (BCD) : x + 14y + 13z – 17 = 0 A(-1, 4, 5) ⇒ $d(A,(BCD))=\dfrac{\left|-1+4\times4+13\times5-17\right|}{\sqrt{1^2+4^2+13^2}}=\dfrac{63}{\sqrt{186}}=\dfrac{21\sqrt{186}}{62}$



Déterminer l'équation d'une sphère en utilisant sa position relative par rapport à un plan donné

ENONCES

Dans un repère orthonormé dans l'espace déterminer l'équation de la sphère de centre A(1, - 2, 4) et tangente au plan d'équation $x + y + z - 2 = 0$.

SAVOIR

Soit S une sphère de centre A et de rayon R. soit P un plan et H le projeté orthogonal de A sur P. On a :
- $P \cap S = \varnothing$ si $AH > R$ (P et S sont dits disjoints)
- $P \cap S = \{H\}$ si $AH = R$ (P est tangent à S en H)

$P \cap S = \zeta_{\left(H, \sqrt{R^2 - AH^2}\right)}$ si $AH < R$ (P et S sont sécants suivant un cercle ζ)

SOLUTIONS

$d(A, P) = \dfrac{|1-2-4-2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

La sphère et le plan sont tangents si et seulement si $R = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

Une équation de la sphère est $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \dfrac{49}{3}$

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

Le mode VECTOR



VECTOR comme «***vecteur***» est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calculs vectoriels. Il s'obtient en pressant successivement la touche MODE et la touche 8.

Exemple

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

❑***Enregistrement de le vecteur*** $\overrightarrow{AB}$

MODE 8 1 1 1 = 2 = 3 = AC

❑***Enregistrement de le vecteur*** $\overrightarrow{BC}$

SHIFT 5 1 2 1 4 = 5 = 6 = AC

❑***Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs***

☞On trouve $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

Le mode MATRIX

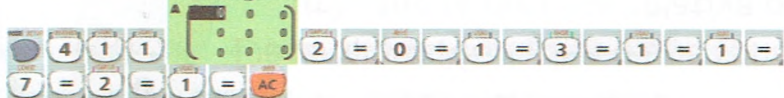
MATRIX comme « ***calculs matriciels*** » est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calculs matriciels. Il s'obtient en pressant successivement la touche MODE et la touche 5.

Déterminant

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$dét(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=-3$

❑***Enregistrement de matrice A***



❑***Pour calculer déterminant de A***

☞On trouve ***det(A)*** = −3



CHAPITRE

10

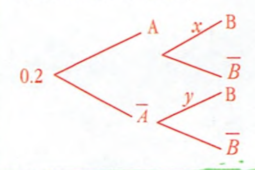
PROBABILITÉS



Objectif 1 — Interpréter un arbre de probabilités

ENONCES

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux événements, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs événements contraires ;



1. a) Que représente les nombres x et y ?
   b) Compléter cet arbre.
2. Exprimer p(B) en fonction de x et y.
3. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que A et B soient indépendants.

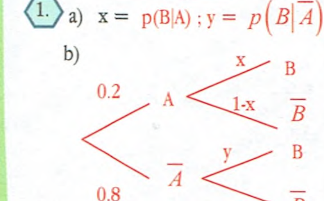
SAVOIR

- Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(B) = p(A) \times p(B|A) + p(\overline{A}) \times p(B|\overline{A})$, c'est le principe de probabilité totale.
- A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.
  - A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
  - A et B sont ***indépendants*** si et seulement si $p(A|B) = p(A)$ ou $p(B|A) = p(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
- ***Règles de construction d'un arbre de probabilités***
  - La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est *1*.
  - La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

SOLUTIONS

1. a) $x = p(B|A)$; $y = p(B|\overline{A})$

   b)



2. $P(B) = 0.2x + 0.8y$
3. A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(B|A) = p(B)$
   $\Leftrightarrow x = 0.2x + 0.8y \Leftrightarrow x = y.$

Objectif 2

Modéliser une situation de probabilité conditionnelle par un arbre de probabilités

ENONCES

On jette une pièce de monnaie

- Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
- Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire sachant qu'on a obtenu pile
3) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire
4) Sachant qu'on a tiré une boule noire , quelle est la probabilité que l'on a obtenu pile

SAVOIR

- Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité
- ***Formule des probabilités totales***

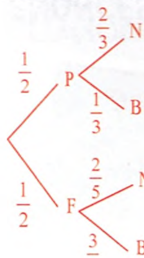
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une ***partition*** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors : $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n)$

Ou $p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots\ldots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

SOLUTIONS

1) Notons P l'événement « obtenir pile » et F : « obtenir face »
N l'événement : « tirer une boule noire » et B : « tirer une boule blanche »



2) $P(N|P) = \dfrac{2}{3}$

3) $P(N) = p(P) \times p(N|P) + p(F) \times p(N|F)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{15}$

4) $P(P|N) = \dfrac{p(P \cap N)}{p(N)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \dfrac{5}{8}$



Calculer la probabilité d'une intersection des événements

ENONCES

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue 3 tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est blanche, on ne la remet pas.

Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'événement "seule la k ième boule tirée est blanche".

1. Montrer que la probabilité de l'événement E_1 est $p(E_1)=\frac{5}{36}$.
2. Calculer les probabilités des événements E_2 et E_3.
   En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages.

SAVOIR

Principe des probabilités composées

Si A, B et C sont trois événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(A \cap B) \neq 0$

alors $P(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B|A) \times p(C|A \cap B)$

SOLUTIONS

1. E_1 : « seule la première boule tirée est blanche »

$(B, R, R) \Rightarrow p(E_1) = p(B) \times p(R|B) \times p(R|B \cap R) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{36}$

2. E_2 : « seule la deuxième boule tirée est blanche »

$(R, B, R) \Rightarrow p(E_2) = p(R) \times p(B|R) \times p(R|B \cap R) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{10}{81}$

E_3 : « seule la troisième boule tirée est blanche »

$(R, R, B) \Rightarrow p(E_3) = p(R) \times p(R|R) \times p(B|R \cap R) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{80}{729}$

E : "une seule boule blanche tirée à l'issue des trios tirages" $\Rightarrow E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ (réunion disjointe)

$\Rightarrow p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1085}{2916}$



Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire et calculer ses paramètres

ENONCES

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait simultanément 2 boules.

On perçoit un dinar pour chaque boule rouge tirée. Désignons par X la somme gagnée à l'issue d'un tirage de 2 boules.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

SAVOIR

- Il est commode de présenter la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- L'espérance de X est : $E(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_i x_i)$.
- La variance de X est : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$.
- L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

SOLUTIONS

1.

Gain x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
Probabilité $p_i = p(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$	$\frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$	$\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$

2. $E(X) = \frac{6}{7}$; $V(X) = \frac{2}{7}\times 0 + \frac{4}{7}\times 1 + \frac{1}{7}\times 4 - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{8}{7} - \frac{36}{49} = \frac{20}{49} \approx 0{,}408$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$



Reconnaître une loi binomiale et calculer ses paramètres

ENONCES

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher : six boules blanches et quatre boules noires.

1. Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules du sac. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : S : « Tirer trois boules blanches »

2. On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'événement S est réalisé.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer son espérance mathématique et son écart type.
   c) Calculer la probabilité de l'événement : « $(1 \leq X < 3)$ »

SAVOIR

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
  - Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
  - Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
  - La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

Si l'épreuve est répétée n fois alors $X(\Omega) = \{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$

et on a pour tout $k \in \{0,1,\ldots\ldots,n\}, p(X=k) = C_n^k \times [p(S)]^k \times [p(E)]^{n-k}$

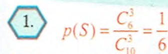
→ on dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p = p (S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note B (n, p).

Théorème :

Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors $E(X) = n \times p$, $V(X) = np(1-p) = n \times p \times q$ où $q = 1-p$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

SOLUTIONS



1. $p(S) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

2. Répétition trois fois de suite d'une même épreuve dans les mêmes conditions

⇒ X suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et p = p(S) = $\frac{1}{6}$

a) $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et pour tout $k \in \{0,1,2,3\}, p(X=k) = C_3^k \times \left[\frac{1}{6}\right]^k \times \left[\frac{5}{6}\right]^{3-k}$

b) $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ et $\delta(X) = \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$ c) $P(1 \leq X < 3) = p(X = 1) + p(X$



Calculer la probabilité uniforme sur un intervalle

ENONCES

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

SAVOIR

☞ Soit un intervalle $[a,b]$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a,b]$.

☞ On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d f(x)dx$.

☞ On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme p si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d f(x)dx=\dfrac{d-c}{b-a}$

SOLUTIONS

La variable aléatoire est le temps uniformément réparti sur 30 minutes donc $f(x) = 1/30$.

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30.

On a donc $p(10\le X\le 15)=p(25\le X\le 30)=\int_{25}^{30}\dfrac{1}{30}dx=\dfrac{1}{6}$,

soit la probabilité cherchée égale à $2.\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

2. De même on a $p(0\le X\le 5)+p(15\le X\le 20)=\dfrac{1}{3}$

Objectif 7

Calculer la probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle

ENONCES

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.

1. Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de dix minutes ?
2. Quelle est la probabilité que vous attendiez entre dix et vingt minutes ?

SAVOIR

☞ Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

☞ On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- *à* tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$
- *à* tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,+\infty[)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_c^x \lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda c}$

SOLUTIONS

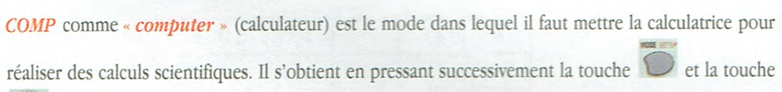
1. L'attente est supérieure à dix minutes, on a $p(X>10)=e^{-\frac{1}{10}\times 10}=e^{-1}\approx 0,37$.

2. De même on a $p(10\le X\le 20) = p(10\le X\le 20)=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=e^{-1}-e^{-2}\approx 0,23$.

Utiliser la calculatrice (Casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)



Le mode COMP [MODE] [1]



COMP comme « *computer* » (calculateur) est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calculs scientifiques. Il s'obtient en pressant successivement la touche [MODE] et la touche [1].Dans ce mode, rien n'est inscrit en haut de l'affichage hormis l'indication de l'unité d'angle. Dans la suite des explications, si rien n'est précisé, les calculs s'effectueront en mode *COMP*.

Exemple

$C_{10}^{3} = 120$ [1] [0] [SHIFT] [÷] [3] [=]

$A_{10}^{3} = 720$ [1] [0] [SHIFT] [×] [3] [=]

CHAPITRE 11

STATISTIQUES



Exploiter le point moyen

ENONCES

Dans la série statistique ci-contre, deux valeurs ont été effacées

x_i	8,2	7,4		6,1	9
y_i	15	12,1	16,3		12

On connaît, par contre, le point moyen G par ses coordonnées : $x_G = 7{,}5$ et $y_G = 12{,}6$.
Pouvez-vous retrouver les valeurs manquantes ?

SAVOIR

Soit une série statistique à deux variables, X et Y, dont les valeurs sont des couples $(x_i ; y_i)$

On appelle point moyen de la série le point G de coordonnées $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \end{cases}$.

SOLUTIONS

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}5 = \dfrac{8{,}2 + 7{,}4 + x_3 + 6{,}1 + 9}{5} \\ 12{,}6 = \dfrac{15 + 12{,}1 + 16{,}3 + y_4 + 12}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30{,}7 + x_3 = 37{,}5 \\ 55{,}4 + y_4 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 6{,}8 \\ y_4 = 7{,}6 \end{cases}$$



Ajuster une série statistique par la méthode de Mayer

ENONCES

Une entreprise consacre une certaine somme à des opérations publicitaires au début de chaque mois. Le tableau suivant met en évidence la relation entre les ventes réalisées et les frais de publicité engagés au début de chaque mois.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Frais de Pub (en millier de dinars)	40	90	100	60	130	160	20
Ventes (en millier de dinars)	1400	2000	2500	2000	2900	3000	1000

1°) *a)* Dans un repère, représenter le nuage de points associé à cette série.

b) Déterminez les coordonnées de G, point moyen de nuage. Placez le point G.

2°) Calculer les coordonnées des points moyens

- Pour le groupe des 3 premiers points : Point moyen G_1 .
- Pour le groupe des 4 derniers points : Point moyen G_2 .

3°) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2). Tracer (G_1G_2).

4°) Estimer quel montant des ventes on peut prévoir avec des frais de publicité de 200 000 dinars (*Par le calcul, puis vérifier graphiquement*)

SAVOIR

▶ Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on appelle ***nuage de points*** associé à une série statistique à deux variables, l'ensemble des points $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$; .... $M_n(x_n;y_n)$

▶ Le principe d'ajustement affine suivant la méthode de Mayer consiste à partager le nuage de points en deux sous-nuages et de calculer pour chacun le point moyen G_1 et G_2.

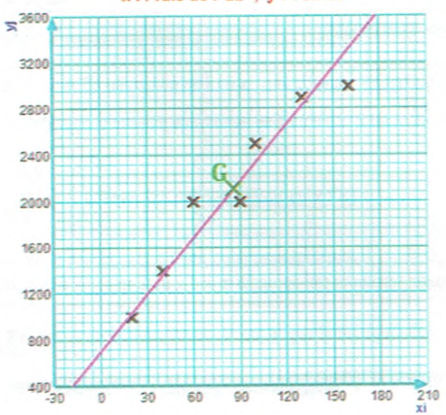
▶ La droite d'ajustement est alors la droite (G_1G_2) dont on peut donner une équation.

▶ La droite de Mayer passe par le point moyen.

SOLUTIONS

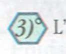
 *a)*





b) Les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \overline{x} = \dfrac{40+90+100+60+130+160+20}{7} \approx 85{,}714 \\ y_G = \overline{y} = \dfrac{1400+2000+2500+2000+2900+3000+1000}{7} \approx 2114{,}286 \end{cases}$$

 Les coordonnées de G_1 et G_2 sont :

$$\begin{cases} x_{G_1} = \dfrac{40+90+100}{3} = \dfrac{230}{3} \\ y_{G_1} = \dfrac{1400+2000+2500}{3} = \dfrac{5900}{3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{G_2} = \dfrac{60+130+160+20}{4} = 92{,}5 \\ y_{G_2} = \dfrac{2000+2900+3000+1000}{4} = 2225 \end{cases}$$

3°) L'équation de la droite (G_1G_2) est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} \approx 16{,}316$

D'où on tire $b = \overline{y} - a\overline{x} \approx 715{,}773$. L'équation de (G_1G_2) est donc : $y = 16{,}316x + 715{,}773$.

4°) $x = 200$; $y = 16{,}316 \times 200 + 715{,}773 = 3978{,}973$.

Le montant des ventes avec des frais de pub de 200 000 dinars est 3978973 dinars.





Ajuster une série statistique par la méthode des moindres carrés

ENONCES 1

Le tableau ci-contre donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages tunisiens, en millions de dinars, de 2005 à 2011.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Montant en millions dinars y_i	90	260	820	1650	2300	4000	5300

1°) Dans un repère, représenter le nuage de points associé à cette série. Un ajustement semble-t-il justifie ?

2°) Calculer les coordonnées du point moyen.

3°) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (D) de y en x par la méthode des moindres carrés, en présentant les calculs dans un tableau.

4°) Tracer cette droite dans le graphique précèdent.

5°) En supposant que ce modèle reste plausible, estimer le montant des achats en ligne des ménages tunisiens en 2012.

SAVOIR

▶ Lors d'un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés, la droite (D) qui représente dans un repère la fonction $f : x \mapsto ax + b$ a pour coefficient directeur :

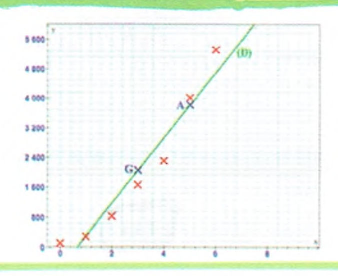
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$ et passe par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$.

▶ La droite (D) est appelée la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

On l'appelle parfois droite de régression de y en x. Une équation de (D) est : $y = a(x - \overline{x}) + \overline{y}$.

SOLUTIONS

1°) Le nuage de point est allongé, un ajustement affine est alors justifié.



2°) $\overline{x} = \dfrac{0+1+\cdots+6}{7} = 3$ et $\overline{y} = \dfrac{90+260+\cdots+5300}{7} = 2060$.

Le point moyen a pour coordonnées $G(3;2060)$.

	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
	0	90	-3	9	-1970	5910
	1	260	-2	4	-1800	3600
	2	820	-1	1	-1240	1240
	3	1650	0	0	-410	0
	4	2300	1	1	240	240
	5	4000	2	4	1940	3880
	6	5300	3	9	3240	9720
Total	21	14420		28		24590

3°) Équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindre carrés :

La droite (D) d'ajustement de y en x passe par $G(3;2060)$ et a pour coefficient directeur $a = \dfrac{24590}{28}$

c'est-à-dire $a \approx 878,21$.

Une équation de (D) est donc : $y = 878,21 \times (x-3) + 2060$ $y = 878,21x - 574,63$

4°) La droite (D) passe par le point moyen G et le point $A(5;3816,42)$.

5°) L'année 2012 correspond au rang 7.

$y = 878,21 \times 7 - 574,63$ c'est-à-dire $y = 5572,84$.

On peut estimer qu'en 2012 le montant des achats en ligne des ménages tunisien s'élèvera à 5572,84 millions de dinars.

ENONCES 2

Dans une grande surface, le prix de vente promotionnel d'un produit ***(en DT)*** est affiché en fonction de son poids ***(en g)*** dans le tableau suivant :

Prix du produit (en D.T) : X	0,650	0,900	1,100	1,300	1,500	2,600
Poids du produit (en g) : Y	100	150	200	250	300	500

1°) Construire le nuage de points de cette série statistique.

2°) Calculer Cov(X ;Y), $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

3°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ***r*** de la série (X, Y). Un ajustement affine est-il justifié ?

4°) Donner les équations des droites de régression relativement à un repère orthogonal du plan.

5°) Quel prix peut-on prévoir pour un produit de poids ***1 kg*** ?

SAVOIR

▶ On appelle covariance d'une série double, le réel noté Cov(X, Y) défini par : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{X}.\overline{Y}$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes arithmétiques respectives des distributions $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ de X et Y.

Remarque

On a : $Cov(X,Y)=\overline{XY}-\overline{X}.\overline{Y}$; où $\overline{XY}$ désigne la moyenne arithmétique de la distribution $(x_iy_i)_{1\leq i\leq n}$ du caractère statistique produit XY .

▶ On appelle coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y le rapport $r=\frac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

▶ Il a le même signe que les coefficients directeurs a et a' des droites de régression.

▶ Son carré est le produit de ces coefficients : $r^2=a\times a'$.

▶ Le coefficient de corrélation linéaire r vérifie $-1\leq r\leq 1$.

▶ Les points $M_i(x_i;y_i)$ sont alignés si et seulement si $r=1$ ou $r=-1$.

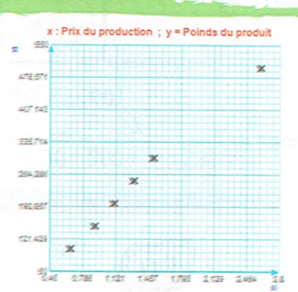
▶ Lorsque le ***coefficient de corrélation linéaire*** r du couple (X, Y) est proche, en valeur absolue, de 1 ($\frac{\sqrt{3}}{2}\leq|r|\leq 1$), le nuage de points de la série considérée a une forme allongée et il est possible d'approcher la liaison entre X et Y par deux relations affines représentées graphiquement par deux droites D_1 et D_2 passant par le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$ du nuage. La droite D_1 : appelée droite de régressionde Y en X et ayant pour équation : $y=ax+b$ avec $a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$;

La droite D_2 : appelée droite de régression de X en Y et ayant pour équation :

$x=a'y+b'$ avec $a'=\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$.

SOLUTIONS





2°) $cov(X,Y)=0,997$; $\sigma(X)=0,624$; $\sigma(Y)=129,099$

3°) $r=0,997$. $|r|=|0,997|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

4°) Droite de régression de Y en X : $y = 206,512x - 27,139$.
Droite de régression de X en Y : $x = 0,005y + 0,092$.

5°) $1k=1000g$. $y=1000$; $x=0,005\times1000+0,092=5,095$.
Le prix pour un produit de poids 1 kg est 5,095 DT.

ENONCES 3

Le tableau suivant est à double entrée : X_i = *la note en Math.* ; Y_j= *la note en phyique.*
Il représente les résultats d'un concours proposé à un groupe de 20 élèves.

X_i / Y_j	8	9	10	12	14	Total (lignes)
7	2	2	0	...	0	4
9	1	2	...	0	0	5
10	...	2	1	2	...	5
13	0	0	0	3	1	4
15	0	0	...	0	2	2
Total (Colonnes)	3	6	3	5	3	20

1°) *a)* Remplir les cases vides.
b) Déterminer n_{23} et n_{45} .
2°) Construire le nuage des points pondérés $(x_i, y_i).n_{ij}$
3°) Calculer : $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et placer le point moyen G.
4°) Calculer : V(X) , V(Y) et Cov(X,Y).
5°) Justifier l'existence d'un ajustement affine du nuage.
6°) Donner les équations des droites de régression.
7°) Si un élève avait *17* en physique , quelle note en math pourrait-il estimer avoir ?

SOLUTIONS

1°) *a)*

X_i / Y_j	8	9	10	12	14	Total (lignes)
7	2	2	0	0	0	4
9	1	2	2	0	0	5
10	0	2	1	2	0	5
13	0	0	0	3	1	4
15	0	0	0	0	2	2
Total (Colonnes)	3	6	3	5	3	20

b) $n_{23}=2$ et $n_{45}=1$.



2°)

Xi : la note en Math ; Yj = la note en phyique

G

xi: 7, 8,333, 9,667, 11, 12,333, 13,667, 15

yj: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17

3°) $\begin{cases} \overline{x} = 10,5 \\ \overline{y} = 10,25 \end{cases}$;donc $G(10,5;10,25)$.

4°) $V(X) \approx 4,05$; $V(Y) \approx 6,287$; $Cov(X,Y) \approx 4,475$.

5°) $r = 0,887$. $|r| = |0,887| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

6°) Droite de régression de Y en X : $y = 1,105x - 1,353$.

Droite de régression de X en Y : $x = 0,712y + 3,202$.

7°) $y = 17$; $x = 0,712 \times 17 + 3,202 \approx 15,30$





Ajuster une série statistique par une fonction logarithmique

ENONCES

1°) L'entreprise K-gaz fabrique et commercialise égualement un produit chimique. Pour des raisons partiques, sa prodution mensuelle ne peut pas eccéder 10 tonnes.
L'entreprise K-Gaz a relevé le coût total de production mensuel (en milliers de dinars), noté y, en fonction de la production x (en tonnes).

x	1	2	4	6	8	10
y	32 ,5	38,5	44,6	48,4	51,1	53,3

a) Le nuage ne semblant pas totalement se preter à un ajustement affine on décide de poser : $z = e^{0,1y}$
Completer le tableau en arronissant les valeurs de z au centième.

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99				

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de regression de z en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à la première décimale).
c) Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.
2°) a) Utiliser le resultat de la question 1°) b) pour obtenir une expresion de y en fonction de x.
b) En utiliser cette équation, estimer le coût total correspondant à une production de 7 tonnes.

SAVOIR

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0,+\infty[$ on a:
- $\ln[\exp(x)] = x$ *et* $\exp[\ln(y)] = y$,
- $x = \ln y \Leftrightarrow y = \exp x$.

SOLUTIONS

1°) *a)*

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99	86,49	126,47	165,67	206,44

b) $z = 19,6x + 7,6$

2°) ***a)*** $z = e^{0,1y} \Leftrightarrow 0,1y = \ln z \Leftrightarrow y = \dfrac{\ln z}{0,1} = \dfrac{19,6x + 7,6}{0,1} = 196x + 76.$

b) $x = 7,\quad y = 196 \times 7 + 76 = 1448$



Ajuster une série statistique par une fonction exponentielle

ENONCES

Le tableau suivant indique l'évolution de la consommation d'énergie électrique dans un pays au cours de 8 années successives :

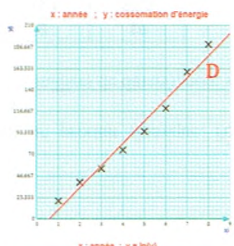
X : année	1	2	3	4	5	6	7	8
Y : consommation (en Twh)	20	40	55	75	95	120	160	190

1°) *a)* Représenter le nuage de points de la série double (X, Y) dans un repère orthogonal du plan.
b) Calculer le coefficient r_1 de corrélation linéaire du couple (X, Y).
c) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de Y en X et construire D.

2°) On suppose que la relation entre X et Y est du type exponentiel : $Y = k.e^{aX}$ et on pose $V = \ln(Y)$
a) Représenter le nuage de points de la série double (X, V) dans un repère orthogonal du plan.
b) Calculer le coefficient r_2 de corrélation linéaire du couple (X, V).
c) En déduire qu'il y'a une forte corrélation linéaire entre V et X puis construire la droite Δ de régression de V en X.
d) En écrivant $V = a.X + b$ où $b = \ln(k)$, trouver alors les réels a et b.

SOLUTIONS

1°) *a)* Représentation du nuage de points de la série double (X, Y) ; voir figure ci-contre :



b) On a :

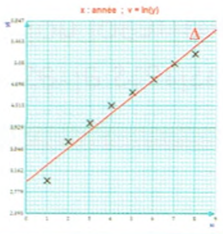
$\overline{X} = 4,5$; $\overline{Y} = 73$; $\sigma(X) = 2,29$; $\sigma(Y) = 46,64$;

$$\text{cov}(X,Y) = 50,5;\ r_1 = r(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = 0,47$$

c) Une équation de la droite D de régression de X en Y est : $y = 9,62.x + 29,71$.

2°) a) $V = \ln(Y)$; On a :

X	1	2	3	4	5	6	7	8
V	2.995	3.688	4.007	4.317	4.553	4.787	5.075	5.247



b) On a : $\overline{X}=4,5$; $\overline{V}=4,33$; $\sigma(X)=2,29$; $\sigma(V)=0,7$;

$$cov(X,V)=1,579;\ r_2=r(X,V)=\frac{cov(X,V)}{\sigma(X).\sigma(V)}=0,98\ ;$$

On a $r_2=r(X,V)=0,98$ est voisin de 1 donc il y a forte corrélation linéaire entre v et x et un ajustement affine est alors, justifié.

c) Voir graphique au-dessus.

d) Une équation de la droite Δ de régression de X en V est : $v=0,3.x+2,98$.

Ainsi, $a=0,3$ et $b=2,98$ ce qui donne : $Y=e^{2,98}.e^{0,3.X}=e^{0,3.X+2,98}$.



Ajuster une série statistique par une fonction polynôme

ENONCES

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit A selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

- x_i désigne le prix de vente unitaire (en dinars) du produit A
- y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1°) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan (*unités graphiques* : 4 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).

2°) On recherche un ajustement affine de la série $(x_i ; y_i)$.

a) Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. *Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification.*

b) Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.

c) Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

3°) La forme du nuage permet d'envisager un ajustement à l'aide d'une parabole. On pose $z_i = (0,75x_i - 3,16)^2$

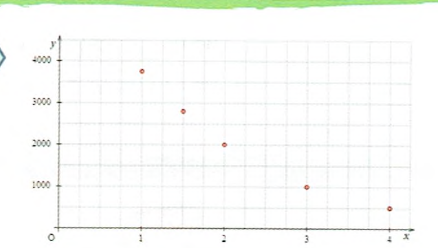
a) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en z par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis à* 10^{-3} *près*).

b) Vérifier que la nouvelle estimation de y en fonction de x est donnée par $y = 0,313x^2 - 2,64x + 6,062$ (*les coefficients sont arrondis à* 10^{-3} *près*).

c) En utilisant cet ajustement, donner une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

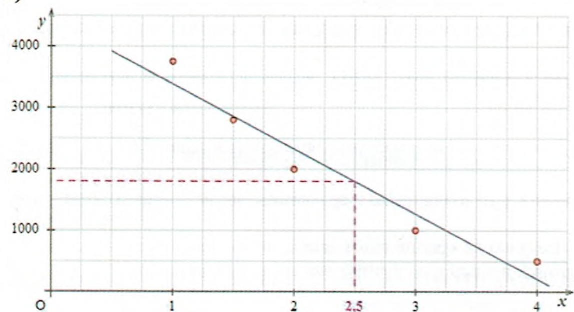
SOLUTIONS

1°)



2°) ***a)*** Une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est : (coefficients arrondis au centième) $y = -1{,}06x + 4{,}45$.

b)



c) Si le prix de vente est de 2,50 dinars alors, une estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est : $y = -1{,}06 \times 2{,}5 + 4{,}45 = 1{,}8$

Pour un produit vendu 2,50 dinars, le nombre d'acheteurs potentiels est de 1800.

3°)

x_i	1	1,50	2	3	4
$z_i = (0{,}75x_i - 3{,}16)^2$	5,8081	4,141225	2,7556	0,8281	0,0256
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

a) Une équation de la droite d'ajustement de y en z obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = 0{,}557z + 0{,}500$ (coefficients arrondis à 10- 3 près).

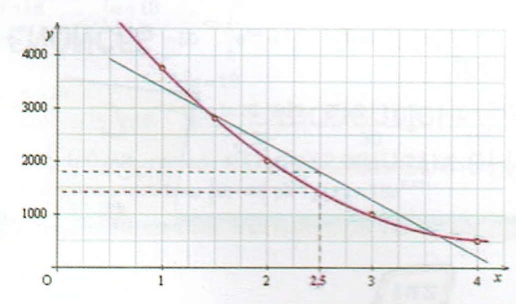
b) $y = 0{,}557z + 0{,}500$ et $z = (0{,}75x - 3{,}16)^2$ alors $y = 0{,}557\,(0{,}75x - 3{,}16)^2 + 0{,}5$

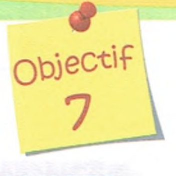
équivalent à $y = 0{,}557(0{,}5625x^2 - 4{,}74x + 9{,}9856) + 0{,}5$ soit $y = 0{,}313313x^2 - 2{,}64018x + 6{,}0619792$

La parabole qui ajuste le nuage de points a donc bien pour équation : $y = 0{,}313x^2 - 2{,}64x + 6{,}062$.

c) Le prix de vente est de 2,50 dinars alors, une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est : $y = 0{,}313 \times 2{,}5^2 - 2{,}64 \times 2{,}5 + 6{,}062 = 1{,}41825$

Pour un produit vendu 2,50 dinars, le nombre d'acheteurs potentiels est de 1418.





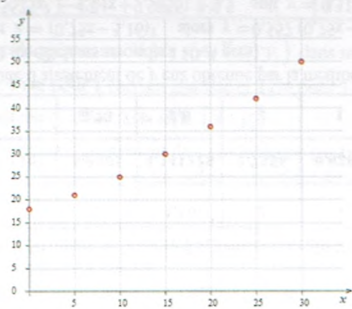
Ajustement affine - Ajustement exponentiel - Calcul d'une valeur moyenne

ENONCES

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté sur le graphique ci-dessous : le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.



PARTIE A : AJUSTEMENT AFFINE

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite sur le graphique donné.

2°) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

PARTIE B : UN AJUSTEMENT EXPONENTIEL

1°) L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ae^{bx}$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b tels que $f(0)=18$ et $f(30)=50$. On donnera une valeur arrondie de b au millième.

2°) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

3°) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné.

4°) La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

PARTIE C : CALCUL D'UNE VALEUR MOYENNE

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x)=18e^{0,034x}$.

1°) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0 ; 30]$; on donnera le résultat arrondi au dixième.

2°) À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population a atteint cette valeur moyenne ?

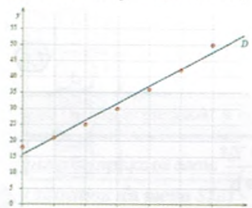
SAVOIR

Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I et a, b deux réels appartenant à I tels que $a < b$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$, le nombre : $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

SOLUTIONS

PARTIE A : AJUSTEMENT AFFINE

1°) Une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés obtenue à l'aide calculatrice est : $y = 1,06x + 15,75$ (*coefficients arrondis au centième*)



2°) Le rang de l'année 2003 est $x = 33$.
Une estimation de la population en 2003 obtenue à partir de l'ajustement affine est :
$y = 1,06 \times 33 + 15,75 = 50,73$ En 2003, la population est estimée à 51 milliers d'habitants.

PARTIE B : UN AJUSTEMENT EXPONENTIEL

1°) $f(0) = 18$ alors a et b sont solutions de l'équation $ae^{b\times 0} = 18 \Leftrightarrow a = 18$
$f(30) = 50$, alors a et b sont solutions de l'équation $ae^{30b} = 50$.

Ainsi a et b sont solutions du système d'équation $\begin{cases} a = 18 \\ ae^{30b} = 50 \end{cases}$

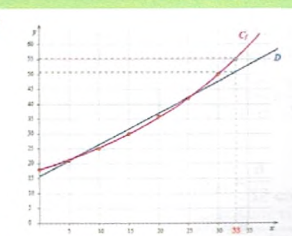
$$\begin{cases} a = 18 \\ ae^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 18e^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ e^{30b} = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ \ln(e^{30b}) = \ln(\frac{25}{9}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 30b = \ln 25 - \ln 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = \frac{\ln 25 - \ln 9}{30} = \frac{2\ln 5 - 2\ln 3}{30} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{15} \end{cases}$$

Par conséquent, la valeur arrondie de b au millième, obtenue à la calculatrice est 0,034.
Ainsi f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 18e^{0,034x}$.

2°) En 2003 une estimation à l'aide de cet ajustement est $f(33) = 18e^{0,034\times 33} \approx 55,2778$.

3°)



4°) L'estimation la plus proche de la population réelle est celle obtenue avec un ajustement exponentiel.

PARTIE C : CALCUL D'UNE VALEUR MOYENNE

1°) $\overline{f} = \dfrac{1}{30-1}\displaystyle\int_0^{30} 18e^{0,034x}dx = \dfrac{18}{30}\displaystyle\int_0^{30} e^{0,034x}dx$.

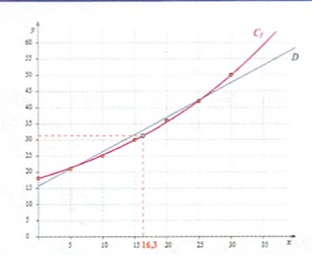
Or sur $[0;30]$, une expression d'une primitive de la fonction $g : x \mapsto e^{0,034x}$ est $G : x \mapsto \dfrac{e^{0,034x}}{0,034}$.

D'où $\dfrac{18}{30}\displaystyle\int_0^{30} e^{0,034x}dx = \dfrac{3}{5}\left[\dfrac{e^{0,034x}}{0,034}\right]_0^{30} = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{e^{0,034\times 30} - e^{0,034\times 0}}{0,034}\right) = \dfrac{3\left(e^{1,02}-1\right)}{0,17}$.

Avec la calculatrice on trouve $\dfrac{3\left(e^{1,02}-1\right)}{0,17} \approx 31,2917$.

Ainsi l'arrondi au dixième de la valeur moyenne de la fonction f sur $[0;30]$ est 31,3.





La droite d'équation $y = 31,3$ coupe la courbe C_f en un point dont l'abscisse est comprise entre 16 et 17.

C'est donc au cours de la dix-septième année à partir de 1970 que la population atteint 31,3 milliers d'habitants.

La population a atteint 31,3 milliers d'habitants au cours de l'année 1987.

Remarque: On peut valider par le calcul le résultat obtenu graphiquement.
Soit n le rang de l'année au cours de laquelle la population atteindra 31,3 milliers d'habitants.
n est le plus petit entier solution de l'inéquation

$$18e^{0,034n} \geqslant 31,3 \Leftrightarrow e^{0,034n} \geqslant \frac{31,3}{18}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{0,034n}\right) \geqslant \ln\left(\frac{31,3}{18}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,034n \geqslant \ln(31,3) - \ln(18)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(31,3) - \ln(18)}{0,034} \approx 16,272.$$

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

Tous les calculs mentionnés ici s'effectuent dans le mode STAT 

1: 1-VAR 5: A+BX
2: _+CX² 6: ln X
3: e^X 7: A•B^X
4: A•X^B 8: 1/X

Types de calculs statistiques

Touche	Elément du menu	Calcul statistique
1	*1-VAR*	*Une variable*
2	*A+BX*	*Régression linéaire*
3	*_+CX2*	*Régression quadratique*
4	*In X*	*Régression logarithmique*
5	*e^X*	*Régression exponentielle e*
6	*A•B^X*	*Régression exponentielle ab*
7	*A•X^B*	*Régression de puissance*
8	*1/X*	*Régression inverse*

Utilisation du menu STAT

Lorsque l'écran de l'éditeur STAT ou l'écran de calcul STAT est affiché, appuyez sur SHIFT 1 pour afficher le menu STAT.
Le contenu du menu STAT est différent selon qu'une variable ou deux variables sont utilisées pour le calcul statistique actuellement sélectionné.

1: Type 5: Data
2: Edit 6: Sum
3: Var 7: MinMax
7: Distr

Statistiques à une variable

1: Type 5: Data
2: Edit 6: Sum
3: Var 7: MinMax
7: Reg

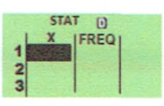
Statistiques à deux variables

Exemple 1 : On considère la série statistiqueà une variable :

X	*10*	*14*
Effectif	*40*	*20*

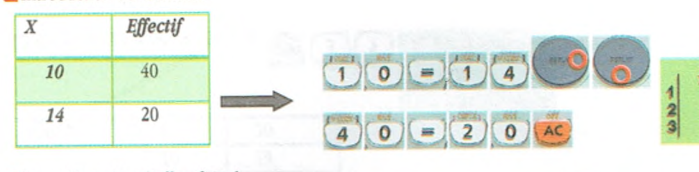
❑ On passe en mode statistique 

STAT D
X
1
2
3

❑Afficher la colonne des effectifs  (FREQ) 



❑ Introduction des données



X	Effectif
10	40
14	20

❑ Pour déterminer l'effectif total

☞ On trouve : $N = 60$



❑ Pour déterminer la moyenne

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} \approx 11{,}33$

❑ Pour déterminer l'écart type

☞ On trouve l'écart type : ≈

❑ Pour déterminer la variance

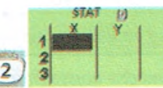
☞ On trouve la variance : $V \approx$



Exemple 2 : On considère la série statistique à deux variables :

X	10	14
Y	40	20

❑ On passe en mode statistique



❑ Introduction des données

X	Y
10	40
14	20

❑ Pour déterminer la moyenne de X

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} = 12$

❑ Pour déterminer la moyenne de Y

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{Y} = 30$



❑ Pour déterminer l'écart type X

☞ On trouve l'écart type : X =

❑ Pour déterminer la variance de X

☞ On trouve la variance de X : VX =



❑ Pour déterminer l'écart type Y

On trouve l'écart type : Y =

❑ Pour déterminer la variance de Y

On trouve la variance de Y : *V* Y =

❑ Pour déterminer la covariance de (X ,Y)

On trouve la covariance :*Cov*(X ,Y) =



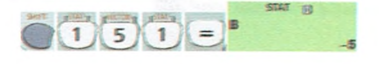
❑ Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire r...:

On trouve: r_{xy} =



❑ Droite de moindre carrés de Y en X ou droite de régression deY en X. (Y=BX+A)

On trouve: B =



et on trouve: A =

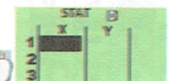


d'où Y = 5X+90

Exemple 3 : On considère la série statistique à double entrée :

X \ Y	2	3	4
10	12	8	2
20	6	20	10

❑ On passe en mode statistique



❑ Afficher la colonne des effectifs

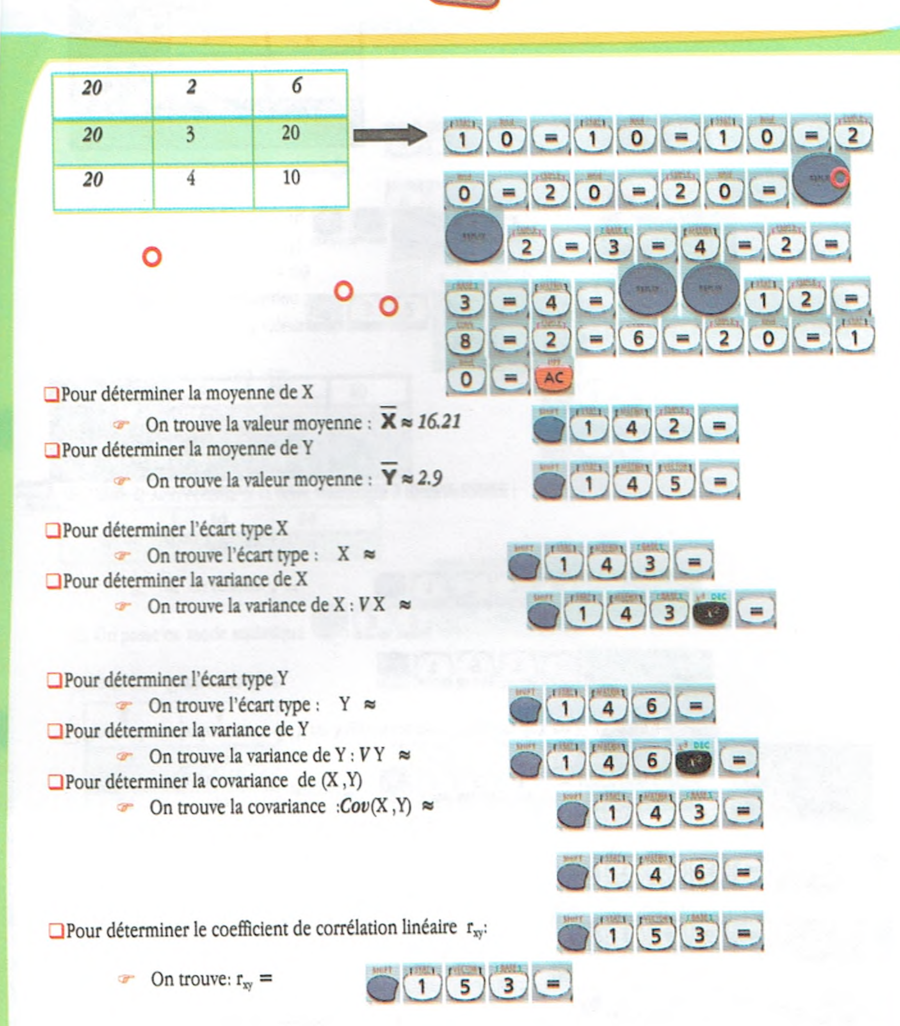


(FREQ)



❑ Introduction des données

X	Y	FREQ
10	2	12
10	3	8
10	4	2



20	*2*	*6*
20	3	20
20	4	10

- Pour déterminer la moyenne de X
  - On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} \approx 16.21$
- Pour déterminer la moyenne de Y
  - On trouve la valeur moyenne : $\overline{Y} \approx 2.9$
- Pour déterminer l'écart type X
  - On trouve l'écart type : X ≈
- Pour déterminer la variance de X
  - On trouve la variance de X : VX ≈
- Pour déterminer l'écart type Y
  - On trouve l'écart type : Y ≈
- Pour déterminer la variance de Y
  - On trouve la variance de Y : VY ≈
- Pour déterminer la covariance de (X ,Y)
  - On trouve la covariance :*Cov*(X ,Y) ≈
- Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_{xy}:
  - On trouve: r_{xy} =

SECTION

SCIENCES EXPIRÉMENTALES



FICHES BAC 4e année secondaire



Chaque fiche traite un point fondamental du programme en proposant :

- Un résumé de cours bien conçu pour comprendre et mémoriser l'essentiel.
- Des exercices types corrigés pour acquérir les bonnes méthodes et éviter les pièges.
- Astuces méthode démarche ingénieuse bien organisée pour aboutir au résultat.

> Dans cette collection













> Découvrez toute la gamme

- **Sciences Informatiques :** Algorithme et Programmation - Base de données - TIC - Mathématiques - Physique/Chimie - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Mathématiques :** Analyse - Géométrie - SVT - Physique/Chimie - Français - Anglais - عربية - فلسفة
  Mécanique - Électricité - Physique/Chimie - Mathématiques - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Sciences Expérimentales :** SVT - Mathématiques - Physique/Chimie - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Sciences Économiques :** Économie - Gestion - Mathématiques - Français - Anglais - عربية - فلسفة تاريخ وجغرافيا
- **Lettres :** Français - Anglais - عربية - فلسفة - تاريخ وجغرافيا - تفكير إسلامي



Kounouz Editions
www.kounouz-edition.com

Prix: 3D.900



ISBN: 978-9938-061-08-6